ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JULIO 1936. — ENTREGA I. — TOMO CXXII

BUENOS AIRES
Calle Santa Fé 1145

1936

Digitized by the Internet Archive
in 2025

https://archive.org/details/anales-de-la-sociedad-cientifica-argentina_1936_122

SOBRE LAS SERIES CONVERGENTES SIMPLES Y MULTIPLES DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA DUAL

POR J. C. VIGNAUX

RÉSUMÉ

Dans un travail antérieur, l'auteur, aprè avoir donné les fondements de la théorie des fonctions polygènes de variable complexe dual, étudie une classe spéciale de ces fonctions les fonctions holomorphes duales.

Dans le présent memoire on traite d'abord, les séries simples et doubles de puissance qui définisseent ce type de fonctions, en faisant une étude des propiétés fondamentales et du champ de convergence.

On étudie ensuite les séres de fonctions et les série de polynômes, en fixant le champ de convergence et quelques proprietés de celle-la.

Le travail termine par l'étude des séries simples et doubles de Dirichelet de variable complexe duelle; on établit son champ de convergeance et l'on prouve plusieurs théorèmes fondamentaux.

Dans un autre mémoire, qui suit celui-ci, on généralise tous ces résultats, par la notion de sommabilité (B) que l'on introduit pour ces séries.

INTRODUCCIÓN

En la presente memoria nos proponemos hacer el estudio sistemático, de las series simples y múltiples convergentes de funciones, de una y de varias variables complejas duales.

En el capítulo I, que consta de dos partes, se desarrolla la teoría de las series de potencias. Se determina el campo *circular* de convergencia absoluta, y luego, la región más amplia de convergencia de tales series que resulta ser, una *faja indefinida* del plano de la variable z cuyos lados son paralelos al eje imaginario y simétricos del mismo. Estas series definen en dicho campo de convergencia, funciones holomorfas con derivadas de todos los órdenes.

Se introduce luego la noción de convergencia uniforme y la serie de Taylor.

En la segunda parte se define como aplicación de lo que precede algunas trascendentes elementales.

En el capítulo II se estudian las series dobles de potencias. Los sistemas de círculos asociados de convergencia forman los dominios circulares de convergencia. Se introduce los sistemas de *fajas asociadas* de convergencia que son los dominios de convergencia más amplios de tales series y se prueban varios teoremas fundamentales.

En el capítulo III, se estudian las series funcionales. El campo de convergencia de las series de funciones holomorfas es una *faja* de lados paralelos al eje imaginario. Termina este capítulo con las series de polinomios.

En el capítulo IV, nos ocupamos de las series simples y dobles de Dirichlet de variable compleja dual. Se establece el dominio de convergencia y se prueban varios teoremas.

En otro trabajo se extiende el método de sumación de M. Borel, a las series divergentes de potencias de variable compleja dual, con lo cual se obtienen resultados mucho más generales que los estudiados en este trabajo.

CAPITULO I

1) SERIES SIMPLES DE POTENCIAS

2. Series numéricas. — Dada la sucesión de números complejos(1) duales $\{\alpha_n = a_n + kb_n\}$ diremos que tiene por límite el número complejo dual $\alpha = a + kb$, si a todo número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un entero p, tal que

$$| \alpha - \alpha_n | < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n \geq p \,, \qquad [1]$$

y anotaremos

$$\lim_{n \to \alpha} \alpha_n = \alpha \qquad \text{o bien} \qquad \alpha_n \longrightarrow \alpha$$

(1) Para un estudio sistemático de la clase de los números complejos duales, véase nuestro trabajo « Sobre el número complejo dual », *Anal. Soc. C. Arg.* T. CXXI. Marzo 1936.

La condición [1] se puede escribir

$$\sqrt{(a - a_n)^2 + (b - b_n)^2} < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > p$$

de donde resulta

$$| a - a_n | < \varepsilon \qquad | b - b_n | < \varepsilon$$

esto es

$$a_n \longrightarrow a \quad , \quad b_n \longrightarrow b \qquad [2]$$

Recíprocamente si la [2] se verifica resulta

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$$

Por tanto; *la condición necesaria y suficiente para que la sucesión* $\{\alpha_n\}$ *tenga por límite el número* α *es que las componentes de* α_n *tengan por límite las componentes respectivas de* α.

Sea $\{u_n = a_n + b_n k\}$ una sucesión de números complejos duales; llamaremos serie a la expresión

$$\sum_0^\infty u_n = u_0 + u_1 + \ldots \qquad [3]$$

Pongamos

$$S_n = \sum_0^n u_i = \sum_0^n a_i + k \sum_0^n b_i$$

si el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es un número finito S la serie [3] es *convergente con suma* S. Se tiene

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_0^n a_i + k \lim_{n \to \infty} \sum_0^n b_i$$

es decir

$$S = A + k\,B$$

En el caso que

$$S_n \longrightarrow + \infty \qquad \text{ó} \qquad S_n \longrightarrow - \infty$$

la serie es *divergente* y si S_n no tiene límite, la serie [1] es *oscilante*, y los números

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} S_n = S' \qquad \underline{\lim_{n \to \infty}} S_n = S''$$

son sus *límites de oscilación.*

3. Criterio de convergencia. — *Es condición necesaria y suficiente para que la serie*

$$\sum_0^\infty u_n , \qquad [1]$$

sea convergente, que a todo número $\varepsilon > 0$, *corresponda un entero positivo N, tal que*

$$| S_{n+1} + S_{n+2} + . - + S_{n+p} | < \varepsilon$$

para $u \geq N$ y $p = 1, 2, 3, \ldots$.

De aquí resulta:

1º) *Condición necesaria para que una serie sea convergente, es que su término general* $u_n \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

2º) *Condición suficiente para que una serie sea convergente, es que sea convergente la serie formada con los valores absolutos de sus términos.*

3º) *Si la serie a términos positivos*

$$\sum_0^\infty v_n ,$$

es convergente y, $| u_n | \leq v_n$; *las series*

$$\sum_0^\infty | u_n | \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty u_n ,$$

también convergen.

Diremos que una serie *converge absolutamente,* si la serie formada con los *módulos* de sus términos es convergente.

Todos los teoremas relativos a las series convergentes de números complejos ordinarios, subsisten también cuando sus términos son números complejos duales.

4. SERIES DE POTENCIAS. — Sea $\{u_n\}$ una sucesión dada de números complejos duales; llamaremos *serie de potencias,* a la serie

$$\sum_0^\infty u_n (z - z_0)^n = u_0 + u_1 (z - z_0) + \ldots + u_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad [1]$$

donde z_0 es un número complejo dual *fijo,* y z una variable compleja dual. En particular si $z_0 = 0$, resulta

$$\sum_0^\infty u_n z^n = u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots \qquad [2]$$

donde

$$u_n = a_n + k b_n \quad , \quad z = x + k y . \qquad (k^2 = 0)$$

El campo de convergencia de la serie [2] es el conjunto de puntos del plano z para los cuales ella converge.

Puesto que

$$\begin{aligned} u_n z^n &= (a_n + k b_n) (x + k y)^n \\ &= (a_n + k b_n) (x^n + k_n x^{n-1} y) \\ &= a_n x^n + k y . a_n n x^{n-1} + k b_n x^n \end{aligned}$$

se tiene

$$\sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k \left(y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n \right)$$

Por tanto, para que la serie [2] converja en un punto $z = x + ky$ es *condición necesaria y suficiente que sean convergentes las dos series potenciales*

$$\sum_0^\infty a_n x^n \quad , \quad \sum_0^\infty b_n x^n . \qquad [3]$$

Igualmente; *la condición necesaria y suficiente para que ella sea absolutamente convergente es que converjan absolutamente las series* [3].

Los teoremas que siguen fijan el campo de convergencia simple y absoluto de una serie de potencias.

TEOREMA I. — *La serie de potencias*

$$\sum_0^\infty u_n z^n , \qquad [4]$$

es absolutamente convergente en el interior de un círculo de centro O y radio

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\overline{\lim_{u \to \infty}} \sqrt[n]{|u_n|}}$$

En efecto; se tiene (1)

$$|u_n z^n| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |u_n| |z^n| < \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n |u_n| |z|^n$$

desde que

$$|z^n| = |z \,.\, z \,\ldots\, z| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} |z|^n ;$$

y como la serie a términos reales y positivos

$$\sum_0^\infty |u_n| \left(\frac{2}{\sqrt{3}} |z|\right)^n ,$$

tiene por radio de convergencia el número

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|u_n|}}$$

resulta que la serie [4] converge absolutamente para todo valor de z, tal que

$$\frac{2}{\sqrt{3}} |z| < R_1 ,$$

es decir, para

$$|z| < \frac{\sqrt{3}}{2} R_1 = R .$$

(1) Véase: J. C. VIGNAUX, *loc. cit.*, pág. 116.

A este círculo de centro en O y radio igual a R, lo llamaremos *círculo de convergencia* de la serie [1] y al número R, su *radio de convergencia.*

5. — Sean las dos series potenciales

$$[1] \qquad \sum_0^\infty u_n z^n \quad , \quad \sum_0^\infty v_n t^n \qquad [2]$$

donde

$$u_n = a_n + k\, b_n \quad , \quad v_n = a_n + i\, b_n$$

$$z = x + k\, y \quad , \quad t = x + i\, y \qquad (i^2 = -1)\,.$$

resulta

$$| u_n | = | v_n | = \sqrt{a^2_n + b^2_n}\,.$$

$$| z | = | t | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

de modo que si r y R son respectivamente los radios de los círculos de convergencia de las series [1] y [2], se tiene

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{| u_n |}} \qquad R = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{| v_n |}}$$

por tanto

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}\, . R$$

De aquí resulta que $r < R$ es decir, el círculo de convergencia de la serie [1] es interior al de la serie [2].

Observación. — Consideremos la serie de potencias de variable compleja hiperbólica (1),

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [3]$$

con

$$u_n = a_n + j\, b_n \qquad z = x + j\, y \qquad (j^2 = +1)\ ;$$

(1) J. C. Vignaux y A. Durañona y Vedia: *Sobre la teoría de las funciones de una variable compleja hiperbólica.* « Contribución al Estudio de las C. Físicomatemática », V. I., E 2º. Julio (1935), Cap. II.

su radio del círculo de convergencia es igual a

$$R' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|u_n|}} = \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

es decir

$$R' < R$$

Entre estos tres radios existe por tanto la relación

$$R' < r < R .$$

El teorema anterior nos da solamente el *dominio circular máximum de convergencia* de la serie- [1].

6. — Vamos a determinar ahora, la región más amplia de convergencia de la serie [1].

Teorema II. — *Si la serie de potencias*

$$\sum_0^\infty n_n z^n , \qquad [1]$$

converge en el punto $z = z_0$, *ella converge en todos los puntos interiores de una faja, de lados paralelos al eje imaginario, uno de los cuales pasa por* z_0 *y el otro es simétrico respecto de dicho eje.*

De la convergencia de la serie numérica

$$\sum_0^\infty n_n z_0 \quad , \quad z_0 = x_0 + k y_0 \qquad [2]$$

resulta que también convergen las series componentes

$$\sum_0^\infty a_n x_0^n \quad , \quad \sum^\infty n a_n x_0^{n-1} \quad , \quad \sum_1^\infty b_n x_0^n ,$$

y por tanto ellas convergen en todo el intervalo real: $|x| \leq |x_0|$, y representan las funciones

$$A(x) \quad , \quad A'(x) \quad \text{y} \quad B(x).$$

En consecuencia, la serie

$$\sum_0^\infty n_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k y \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n$$

es convergente en todo punto z de la faja y tiene por suma a

$$f(z) = A(x) + k[yA'(x) + B(x)].$$

TEOREMA III. — *Sea la serie de potencias*

$$\sum_0^\infty a_n z^n \quad , \qquad z = x + k y \tag{3}$$

donde sus coeficientes a_n son números reales. La serie [3] *converge en una faja simétrica del eje Oy, y cuya distancia a los lados es*

$$\delta = \frac{1}{\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

En efecto; se tiene que

$$a_n z_n = a_n (x + k y)^n = a_n (x^n + k n x^{n-1} y)$$

por tanto

$$\sum_0^\infty a_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} . \tag{4}$$

La serie de potencia real

$$P(x) = \sum_0^\infty a_n x^n , \tag{5}$$

es absolutamente convergente para todo valor de x tal que

$$|x| < \delta \qquad \text{y divergente para} \qquad |x| > \delta$$

En cuanto a la serie

$$\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} , \tag{6}$$

siendo la serie derivada de la [4], su intervalo de convergencia es igual al número δ, y tiene por suma la derivada $P'(x)$ de $P(x)$

$$P'(x) = \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} , \qquad \text{para} \qquad |x| < \delta$$

De aquí resulta, en consecuencia, que la serie de potencia [5] es convergente en el dominio $(-\delta < x < +\delta, \ -\infty < y < +\infty)$.

Llamaré a este dominio *faja de convergencia* de la serie de potencia [4] y la distancia δ de sus lados al eje *Oy, radio de convergencia* de la faja.

La serie potencial [4] de coeficientes reales a_n, define por su suma, en el interior su faja de convergencia una función $f(z)$ dada por la expresión

$$f(z) = P(x) + k\,y\,P'(x)\,.$$

Cuando los coeficientes a_n son números complejos duales, el campo de convergencia está definido por el siguiente

TEOREMA IV. — *Dada la serie*

$$\sum_0^\infty u_n\,z^n\,, \qquad [7]$$

donde

$$u_n = a_n + k\,b_n \quad , \quad z = x + k\,y\,,$$

ella converge absolutamente en una faja simétrica del eje Oy y cuyo radio δ *es el menor de los dos números*

$$\mu_1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|}} \quad , \quad \mu_2 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,b_n\,|}}\,.$$

En efecto; se tiene

$$\begin{aligned} u_n\,z^n &= (a_n + k\,b_n)\,(x + k\,y)^n \\ &= (a_n + k\,b_n)\,(x^n + n\,k\,y\,x^{n-1}) \\ &= a_n\,x^n + k\,(b_n\,x + y\,a_n\,n\,x^{n-1})\,. \end{aligned}$$

por tanto,

$$\sum_0^\infty u_n\,z^n = \sum_0^\infty a_n\,x^n + k\left(y\sum_1^\infty n\,a_n\,x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n\,x^n\right). \qquad [8]$$

La serie de potencias

$$P(x) = \sum_0^\infty a_n\,x^n\,,$$

converge absolutamente, para todo valor de x tal que

$$|\,x\,| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|}} = \mu_1$$

y diverge para $|\,x\,| > \mu_1$. La serie derivada

$$P'(x) = \sum_1^\infty n\,a_n\,x^{n-1}\,,$$

tiene el mismo intervalo de convergencia absoluta que la serie anterior.

En cuanto a la serie de potencia

$$Q(x) = \sum_0^\infty b_n x^n ,$$

ella converge absolutamente para

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \mu_2$$

y diverge para $|x| > \mu_2$.

Si ponemos

$$\delta = \text{menor } (\mu_1, \mu_2)$$

la serie de potencia [8], y por tanto la [7] converge absolutamente en la faja común de las dos fajas de convergencia, es decir en la faja de radio δ. La suma de esta serie es por tanto igual a

$$f(z) = P(x) + k\,[y\,P'(x) + Q(x)]$$

De estos teoremas se deduce la siguiente conclusión:

Toda serie de potencia converge absolutamente en el interior de su faja de convergencia y no converge en los puntos exteriores a la misma.

En los puntos del contorno, la serie puede o no ser convergente.

Además: *toda serie de potencia define por su suma, en los puntos interiores de su faja de convergencia, una función compleja $f(z)$ de la variable compleja dual z.*

Si $R = \infty$, la serie [7] converge en todo el plano; diremos en tal caso que la serie define una *trascendente entera.*

Si $R = 0$, la faja se reduce al eje yy'.

Sea

$$f(z) = \sum_0^\infty z^n = \sum_0^\infty x^n + k\,y \sum_1^\infty n\,x^{n-1} \qquad [9]$$

se tiene

$$R = 1\,, \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)} = \sum_0^\infty x^n \qquad |x| < 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_0^\infty n\,x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

luego

$$f(z) = \frac{1}{1-x} + k\,.\,y\,\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-z}$$

La serie geométrica [9] *converge en la faja de radio* $\delta = 1$ *y su suma es*

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

7. Convergencia uniforme. — Dada la serie

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

convergente en un conjunto de puntos $E(z)$, diremos que ella *converge uniformemente* en este conjunto, cuando fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un $v(\varepsilon)$, tal que

$$| u_{n+1} z^{n+1} + \ldots + u_{n+p} z^{n+p} | < \varepsilon$$

para todo $n > v$, y z de (E).

La serie [1] se puede siempre descomponer en la forma

$$\sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k\left(y \cdot \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n\right)$$

por tanto, *la condición necesaria y suficiente para que una serie de potencia sea uniformemenie convergente, es que converjan uniformemente sus dos componentes reales*

$$\sum_0^\infty a_n x^n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty b_n x^n .$$

é y, sea acotada.

Teorema V. — *La serie de potencia* [1] *converge uniformemente en todo rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados con centro en el origen e interior a la faja de convergencia de la misma.*

Sea la serie

$$\sum_0^\infty u_n z^n$$

con radio de convergencia R.

Sea $r < R$, y consideremos el rectángulo de lados

$$x = + r \quad , \quad x = - r \quad , \quad y = \pm \overline{OM}$$

$\overline{OM}$ arbitrario, pero fijo.

Se tiene, según hemos visto anteriormente

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k\left(y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n \bar{y} x^n\right)$$

y como sus componentes

$$\sum_0^\infty a_n x^n \quad , \quad y \sum_0^\infty a_n n x^{n-1}, \sum_0^\infty b_n x^n$$

convergen uniformemente cuando

$$-r < x < +r \qquad \text{y} \qquad |y| < \overline{OM}$$

de aquí resulta la convergencia uniforme de la serie [1] en el interior y sobre el contorno de dicho rectángulo.

8. CONTINUIDAD. — *La función $f(z)$ definida por la serie* [1] *es continua en este rectángulo.* En efecto; en todo intervalo

$$|x| < r < R$$

las funciones

$$P(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad , \qquad P'(x) = \sum_1^\infty a_n n x^{n-1},$$

y

$$Q(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$$

son *continuas;* así como también la función $y \cdot P'(x)$. Por tanto, la función

$$f(z) = P(x) + k\,[y P'(x) + Q(x)]$$

es función continua en el rectángulo antes definido interior a la faja de convergencia.

TEOREMA VI. — *Sea una serie*

$$f(z) = \sum_0 u_n z^n \qquad [1]$$

convergente en una faja D, y z_0 un punto cualquiera de su contorno. Si la serie numérica

$$\sum_0^\infty u_n z_o^n = S$$

converge con suma S, entonces el límite de $f(z)$ para $z \to z_0$ por todo camino interior a la faja, es igual a S.

En efecto; se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n x^n + k\left(y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n\right) \qquad [2]$$

donde las series

$$\sum_0^\infty a_n x^n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty b_n x^n ,$$

suponemos convergen para

$$| x | < R$$

Como el punto z_0 es por hipótesis un punto del contorno de la faja, resulta entonces

$$| x | = R = x_0$$

Además de la convergencia de la serie

$$S = \sum_0^\infty u_n z_0^n = S' + k (y_0 S'' + S''')$$

resulta la convergencia de las series

$$S' = \sum_0^\infty a_n x_0^n , \; S'' = \sum_1^\infty a_n n x_0^{n-1} , \; S''' = \sum_0^\infty b_n x^n_0$$

y aplicando el clásico teorema de Abel, resulta

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = S' \quad , \quad \lim_{x \to x_0} P'(x) = S'' ,$$

$$\lim_{x \to x_0} Q(x) = S'''$$

La igualdad [2] nos da entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = S' + k(y_0 S'' + S''') = S .$$

Dentro de su faja de convergencia, excluído su contorno, una serie de potencia representa por tanto, una función continua de la variable z

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n .$$

9. Serie derivada. — Dada la serie de potencias

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots \qquad [1]$$

la serie que se obtiene, derivando término a término

$$u_1 + 2 u_2 z + \ldots + n u_n z^{n-1} + \ldots \qquad [2]$$

llamaremos *serie derivada primera.*

La serie derivada [2] *tiene la misma faja de convergencia de la serie* [1] *y su suma, es la derivada* $f'(z)$ *de la suma de la serie* [1].

Sea D la faja de convergencia de la serie [1] ; se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n + k\left(y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n\right)$$

$$= P(x) + k\,[y \,.\, P'(x) + Q(x)]$$

donde las series de potencias

$$P(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad Q(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$$

convergen para $|x| < R$.

De aquí resulta que las series de potencias

$$P'(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} \quad , \quad P''(x) = \sum_{2}^{\infty} a_n\, n\, (n-1)\, x^{n-2}$$

$$Q'(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n\, n\, x^{n-1}$$

tienen la misma faja de convergencia; por tanto, la serie

$$f'(z) = P'(x) + k\,[y\,.\,P''(x) + Q'(x)] = \sum_{1}^{\infty} n\, u_n\, z^{n-1}$$

converge en dicha faja.

Razonando sobre la serie [2] como hemos hecho anteriormente sobre la [1], se concluye que la fórmula $f(z)$ admite una derivada segunda

$$f''(z) = 2\, u_2 + 2\,.\,3\, u_3\, z + \ldots + u\,(u-1)\, u_n\, z^{n-2} + \ldots$$

y así sucesivamente.

La función $f(z)$ definida por la serie [1], *admite en su faja de convergencia* (D) *una sucesión ilimitada de derivadas* $f^{(n)}(z)$ *que están definidas por las series derivadas correspondientes.*

10. Serie de Mac Laurin. — Sea

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} u_n\, z^n \qquad [1]$$

una función definida por la serie convergente en una faja D de convergencia.

Según se ha visto anteriormente, se tiene

$$f^{(n)}(z) = 1\,.\,2\,\ldots\,n\,u_n + 2\,.\,3\,\ldots\,n\,(n+1)\,u_{n+2} + \ldots$$

$$(n = 0, 1, 2\,\ldots)$$

Si hacemos en estas derivadas sucesivamente $z = 0$, resulta

$$f(0) = u_0 \quad , \quad f'(0) = u_1\,, \ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} = u_n\,, \ldots$$

de tal suerte, el desarrollo de $f(z)$ se puede escribir

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \qquad [1]$$

que llamaremos serie de Mac Laurin.

Por tanto: *Toda serie de potencias* [1] *define por su suma, una función* $f(z)$ *continua y con derivadas de todos los órdenes, en el interior de su faja de convergencia.*

2) FUNCIONES ELEMENTALES

Como aplicación inmediata del estudio anterior, vamos ahora a definir las trascendentes elementales e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z, \ldots$

11. Función exponencial e^z. — Consideremos la serie de potencias

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!},$$

la cual, tiene por círculo de convergencia, el círculo de radio $R = \infty$; por tanto, ella define una trascendente entera.

Sean u y v, dos valores de z, se tiene

$$f(u) = \sum_0^\infty \frac{u^n}{n!} \quad [1] \quad , \quad f(v) = \sum_0^\infty \frac{v^n}{n!} \qquad [2]$$

$$f(u+v) = \sum_0^\infty \frac{(u+v)^n}{n!} \qquad [3]$$

Multiplicando la [1] por la [2] resulta

$$f(u)\, f(v) = \sum_0^\infty w_n$$

donde

$$w_n = 1.\frac{v^n}{n!} + \frac{u}{1!}\frac{v^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\frac{v}{1!} + \frac{u^n}{n!}1 =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[v^n + \frac{n}{1!}\, u\, v^{n-1} + \ldots + u^n\right] = \frac{(u+v)^n}{n!}$$

luego

$$f(u) \,.\, f(v) = f(u+v) \qquad [4]$$

Por satisfacer $f(z)$, a esta ecuación funcional y reducirse a la función e^x para $z = x$ real, pondremos

$$f(z) = e^z$$

y llamaremos a e^z *función exponencial* de la *variable dual z.*

Según la [4] resulta que

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}$$

como en el dominio real.

Según la fórmula de adición es

$$e^{x+ky} = e^x \cdot e^{ky},$$

pero

$$e^{ky} = 1 + \frac{ky}{1!} + 0 + 0 + \ldots = 1 + ky$$

luego

$$e^{x+ky} = e^x (1 + ky) = e^x + ky\, e^x$$

La función e^z, es holomorfa (1) en todo el plano, puesto que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial x} = e^x + ky\, e^x = e^z .$$

Se puede llegar también a estos mismos resultados razonando en la siguiente forma. Sea

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} + ky \sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad [1]$$

y como la serie de potencia real

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

(1) Véase: J. C. Vignaux, *Sobre la teoría de las funciones polígenas de una y de varias variables complejas dual.* «Contribución al Estudio de las C. Físicomatemáticas», V. I., E 3° (1936), Cap. II.

tiene por radio de convergencia $R = \infty$, la serie [1] converge absolutamente en todo el plano, y define la función

$$f(z) = e^x + k\, y\, e^x$$

Además como ella coincide con e^x cuando el complejo dual $z = x + ky$ es igual a x, es decir $y = 0$; pondremos $f(z) = e^z$, luego

$$\boxed{e^z = e^x + k\, y\, e^x} \qquad [2]$$

De aquí resulta, siendo $z' = x' + ky'$ otro valor de z, que

$$e^z = e^x + k\, y'\, e^{x'} \qquad [3$$

y multiplicando miembro a miembro la [2] con [3]; se tiene

$$e^z \,.\, e^{z'} = e^{x+x'} + k \,.\, y'\, e^{x+x'} + k\, y\, e^{x+x'} =$$
$$= e^{x+x'} + k\,(y + y')\, e^{x+x'} = e^{z+z'}$$

propiedad característica de la función exponencial.

Finalmente, se puede definir e^z como el límite de la sucesión

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \qquad \text{para} \qquad n \longrightarrow \infty \,.$$

12. Funciones circulares. — Consideremos las dos series de potencias

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3\,!} + \frac{z^5}{5\,!} - \ldots \\ g(z) &= 1 - \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^4}{4\,!} - \ldots \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Estas series convergen en todo el plano, y por tanto, ellas definen dos funciones enteras que se reducen para z real: $z = x$, al sen x y cos x respectivamente.

Por esta razón designaremos así

$$\text{sen}\, z = f(z) \qquad \text{y} \qquad \cos z = g(z)$$

en el dominio *complejo dual.*

Si $x = 0$ resulta $z = ky$, luego la [1] nos da

$$\boxed{\operatorname{sen} k\,y = k\,y} \quad , \quad \boxed{\cos k\,y = 1}$$

Las funciones *sen z* y *cos z son holomorfas en todo el plano y resulta*

$$D \operatorname{sen} z = \cos z \quad , \quad D \cos z = -\operatorname{sen} z$$

que se obtiene derivando las series [1] (y aplicando la teoría general).

La expresión binómica de las funciones cos z y sen z es la siguiente

$$\cos z = \frac{(x + k\,y)}{1\,!} - \frac{(x + k\,y)^3}{3\,!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots\right) - k\,y\left(x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots\right)$$

de donde

$$\boxed{\cos z = \cos x - k\,.\,y \operatorname{sen} x} \qquad [A]$$

Del mismo modo

$$\operatorname{sen} z = \left(\frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots\right) + k\,y\left(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \ldots\right)$$

es decir

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x + k\,y \cos x} \qquad [B]$$

De [A] y [B] resulta nuevamente: $\cos ky = 1$, $\operatorname{sen} ky = ky$.

Aplicando la fórmula

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial x}$$

que define la derivada de una función holomorfa, se tiene

$$D \cos z = -\operatorname{sen} - k\,y \cos x = -\operatorname{sen} z$$

$$D \operatorname{sen} z = \cos x - k\,y \operatorname{sen} x = \cos z\ .$$

Las restantes funciones circulares se definen a partir de las dos anteriores.

De las relaciones [A] y [B] se deducen simplemente las relaciones que ligan a estas funciones

Así

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

13. FUNCIONES HIPERBÓLICAS DUALES. — Del mismo modo se definen el seno y el coseno hiperbólico de la variable compleja dual, mediante las series

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}h\, z &= \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\ \cos h\, z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

que convergen en todo el plano z.

Si $x = 0$, es $z = ky$, luego

$$\operatorname{sen} h\, ky = ky \quad ; \quad \cos h\, ky = 1 .$$

es decir

$$\operatorname{sen} h\, .\, ky = \operatorname{sen} ky = ky$$

$$\cos h\, ky = \cos k\, y = 1 .$$

Las funciones sen hz, cos hz, son *holomorfas en todo el plano*

$$D \operatorname{sen} h\, z = \cos h\, z \quad , \quad D \cos h\, z = \operatorname{sen} h .$$

Se tiene además

$$\cos h\, z = \frac{(x + ky)}{1!} + \frac{(x + ky)^3}{3!} + \dots$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + k\, y\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

es decir

$$\boxed{\cos h\, z = \cos h\, x + k\, y \operatorname{sen} h\, x}$$

También resulta

$$\boxed{\text{sen } h\, z = \text{sen } h\, x + k\, y \cos h\, x}$$

De las relaciones [1] se deduce

$$\cos h\, z + \text{sen } h\, z = \left(1 + \frac{z}{1\,!}\right) + \left(\frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^3}{3\,!}\right) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{z}{1\,!} + \frac{z^2}{2\,!} + \ldots = e^z$$

es decir

$$\cos h\, z + \text{sen } h\, z = e^z\,,$$

y

$$\cos h\, z - \text{sen } h\, z = e^{-z}$$

Finalmente de estas últimas resulta

$$\cos h\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad , \quad \text{sen } h\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Relaciones que ligan a las funciones hiperbólicas duales con la exponencial dual; y de las cuales se deducen fácilmente las relaciones que ligan a estas funciones.

14. Función logarítmica. — La serie de potencias

$$f(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

converge en la faja de radio igual a 1, luego ella define una función de la variable compleja dual $f(z)$. Esta función coincide para z real con la función logarítmica $\log(1 + z)$; por tanto pondremos para toda z de la faja de convergencia

$$\log(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

La expresión binómica es la siguiente

$$\log (1 + z) = \frac{x + k\,y}{1} - \frac{(x + x\,k)^2}{2} + \ldots \pm \frac{(x + ky)^n}{n} \mp \ldots$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots\right) +$$

$$ky\,(1 - x + \ldots \pm x^{n-1} \mp \ldots),$$

como las series componentes son absolutas convergentes para $|x| < 1$, se tiene

$$\log (1 + z) = \log (1 + x) + \frac{1}{1 + x}\, k\, y$$

$$\log (1 + x) + k\, y\, D_x \log (1 + x).$$

Del mismo modo se tiene

$$\log (1 - z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

15. Serie primitiva. — Dada la serie de potencias

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots \qquad [1]$$

la serie formada por la primitiva de sus términos

$$u_0 z + u_1 \frac{z^2}{2} + u_2 \frac{z^3}{3} + \ldots + u_n \frac{z^{n+1}}{n + 1} + \ldots \qquad [2]$$

llamaremos *serie primitiva* de la serie [1].

La serie primitiva [2] *tiene la misma faja de convergencia de la serie* [1] *y su suma es la primitiva de la suma de la serie* [1].

Sea D la faja de convergencia de la serie [1]; se tiene en el interior de la misma

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k\left(y \sum_1^\infty a_n\, n\, x^{n-1} + \sum_0^\infty b\, n\, x^n\right)$$

$$= P(x) + k\,[y\,P'(x) + Q(x)]$$

Si R es el radio de convergencia de la faja de convergencia de la serie [1], las series de potencia

$$\int P(x)\,dx = \sum_0^\infty a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad \int P'(x)\,dx = P(x)$$

$$\int Q(x)\,dx = \sum_0^\infty b_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

convergen en el intervalo $(-R, +R)$; luego la serie

$$f(z) = \int f(z)\,dz = \sum_0^\infty u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_0^\infty a_n \frac{x^{n-1}}{n+1} + k\left[y \sum_0^\infty a_n x^n + \sum_0^\infty b_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$

es convergente en la faja (D), y tiene por suma $F(z)$ la primitiva de $f(z)$.

Sea la serie convergente

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots$$

en la faja de convergencia de radio $R = 1$.

De la anterior se deduce la serie primitiva

$$\int \frac{dz}{1+z} = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots$$

la cual converge en la misma faja y representa la función

$$\log(1+z) = \int \frac{dz}{1+z} \cdot$$

CAPITULO II

SERIES DOBLES DE POTENCIAS

16. SERIES DOBLE NUMÉRICA. — Dada una sucesión doble de números complejos duales

$$\left\{ \alpha_{m,n} = a_{m,n} + k\, b_{m,n} \right\}, \qquad [1]$$

diremos que tiene por límite el número complejo dual

$$\alpha = a + b\, k,$$

si, fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número p, tal que

$$| \alpha - \alpha_{m,n} | < \varepsilon, \qquad \text{para} \qquad m, n > p$$

La sucesión [1] *converge acotadamente* si además de ser convergente, existe un número positivo M tal que

$$| \alpha_{m,n} | < M$$

para todo m y n natural.

Se dirá que la sucesión [1] tiende regularmente a su límite α si

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_{m,n} = \alpha_n \qquad , \qquad \lim_{n \to \infty} \alpha_{m,n} = \alpha_m$$

y el doble límite

$$\lim_{m,n \to \infty} \alpha_{m,n} = \alpha$$

existe.

Es condición necesaria y suficiente para que la sucesión doble [1] *converja simple, acotada o regularmente, que la sucesión doble* $a_{m,n}$ *y* $b_{m,n}$ *converjan simple, acotada o regularmente respectivamente.*

Llamaremos serie doble numérica a la expresión

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \qquad [1]$$

Pongamos

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} u_{ij},$$

si, la sucesión doble $\{S_{m,n}\}$, tiene un límite finito S, la serie [1] es convergente, con suma S.

La serie doble [1] es acotada o regularmente convergente si $\{S_{m,n}\}$, converge acotada o regularmente, respectivamente.

Es condición necesaria y suficiente para que la serie [1] *converja simple, acotada o regularmente, que converjan simple, acotada o regularmente las series dobles de sus componentes, respectivamente.*

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} \quad \text{y} \quad \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} b_{m,n}$$

La serie doble [1] *converge absolutamente* si, converge la serie doble formada con los módulos de sus términos.

Es condición *necesaria* y *suficiente* para que la serie doble [1] sea *absolutamente convergente,* que converjan absolutamente, las series dobles de sus componentes.

17. Serie doble de potencias. — Consideremos la serie doble de potencias

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{m,n} z^m z'^n, \qquad [1]$$

$u_{m,n}$ son números complejos duales:

$$u_{m,n} = a_{m,n} + k\, b_{m,n} \quad \text{y} \quad z, z'$$

son dos variables complejas duales

$$z = x + k\, y \quad , \quad z' = x' + k\, y' .$$

El conjunto (z, z') de los valores de las variables z y z' para los cuales la serie doble [1] converge, se llama dominio de convergencia.

Los teoremas que siguen fijan el dominio de convergencia de una serie doble del tipo [1].

TEOREMA V. — *La serie doble*

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} u_{m,n}\, z^m\, z'^n$$

es absolutamente convergente para todo conjunto (z, z') *de valores de la variable* z y z' *tal que*

$$|z| < \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{h(p)} \quad , \quad |z'| < \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{h(p)} \qquad [\alpha]$$

siendo

$$h(p) = \overline{\lim_{m+n\to\infty}} \sqrt[m+n]{|u_{m,n}|\, p^n} \quad , \quad (0<p<\infty)$$

En efecto se tiene

$$|u_{m,n}\cdot z^m\, z'^n| < \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}|u_{m,n}||z^m||z'^n|$$

y como

$$|z^m| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m-1}|z|^m \quad \text{y} \quad |z'^n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}|z'|^n$$

resulta

$$|u_{m,n}\, z^m\, z'^n| < \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}|z|^m|z'|^n \qquad [2]$$

La serie doble de potencias

$$\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}|u_{m,n}|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}|z|\right)^m\left(\frac{2}{\sqrt{3}}|z'|\right)^n$$

real y a términos positivos, converge según el teorema de Lemaire, para todo z y z' tal que

$$\frac{2}{\sqrt{3}}|z| < \frac{1}{\lambda(p)} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}|z'| < \frac{p}{\lambda(p)}$$

por tanto teniendo presente la desigualdad [2], la serie doble [1] converge absolutamente para todos los valores de z y z' que cumplen a la condición [α].

Si representamos a las variables z y z' en dos sistemas de ejes rectangulares situados en un mismo plano, el teorema anterior nos dice que la serie doble [1] converge en los puntos interiores de los dos círculos cuyos centros coinciden con los orígenes y sus radios son los números

$$R(p) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\lambda(p)} \qquad R'(p) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{\lambda(p)} \qquad [3]$$

respectivamente.

Para cada valor del parámetro p corresponde un par de círculos. A este sistema de círculos llamaremos *círculos asociados de convergencia* y los números $R(p)$ y $R'(p)$ los *radios asociados* de convergencia.

18. — Consideremos las dos series dobles

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty U_{m,n}\, z^m\, z'^n \quad [1] \qquad \sum_0^\infty \sum_0^\infty V_{m,n}\, Z^m\, Z'^n \quad [2]$$

donde

$$U_{m,n} = A_{m,u} + k\, b_{m,n}$$

$$V_{m,n} = A_{m,n} + i\, b_{m,n}\,,$$

y

$$z = x + k\, y \quad , \quad Z = x + i\, y$$

Se tiene

$$|\, U_{m,n}\,| = |\, V_{m,n}\,| = \sqrt{a^2_{m,n} + b^2_{m,n}}$$

y

$$|\, z\,| = |\, Z\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

de modo que si designamos respectivamente con

$$r(p) \quad , \quad r'(p)$$

y

$$R(p) \quad , \quad R'(p)$$

los radios asociados de los círculos asociados de convergencia de las series [1] y [2] se tiene

$$r(p) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\lambda(p)} \quad , \quad r'(p) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{\lambda(p)}$$

por tanto

$$r(p) = \frac{\sqrt{3}}{2} R(p) \quad , \quad r'(p) = \frac{\sqrt{3}}{2} R'(p)$$

De aquí resulta que

$$r(p) < R(p) \qquad r'(p) < R'(p)$$

es decir, que los pares de los círculos asociados de la serie [1] son interiores a los pares correspondientes de la serie [2].

19. — El teorema anterior nos da el dominio *circular* más amplio en el interior del cual, la serie doble de potencias, converge absolutamente; pero estas series tienen un dominio más amplio de convergencia.

Vamos a determinar este campo de convergencia. Consideremos primeramente la serie doble

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty u_{m,n}\, z^m\, z'^n \qquad \begin{matrix} z = x + k\,y \\ z' = x' + k\,y' \end{matrix}$$

donde sus coeficientes $u_{m,n}$ son números reales $a_{m,n}$.

Se tiene,

$$\begin{aligned} a_{m,n}\, z^m\, z'^n &= a_{m,n}\,(x + k\,y)^m\,(x' + k\,y')^n = \\ &= a_{m,n}\,(x^m + k\,m\,x^{m-1}\,y)\,(x'^n + k\,n\,x'^{n-1}\,y') \\ &= a_{m,n}\,(x^m\,x'^n + k\,m\,x^{m-1}\,y\,x'^n + k\,n\,x'^{n-1}\,y'\,x^m) \end{aligned}$$

por tanto

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, z^m\, z'^n = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, x^m\, x'^n + k\,y \sum_1^\infty \sum_0^\infty m\, x^{m-1}\, x'^n +$$

$$+ k\,y' \sum_0^\infty \sum_1^\infty n\, x^m\, x'^{n-1}\,.$$

La serie doble de potencia real

$$P(x, x') = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}\, x^m\, x'^n$$

es absolutamente convergente para todo valor de x y x', tal que

$$| x | < \frac{1}{\mu\,(p)} = R\,(p) \quad , \quad | x' | < \frac{p}{\mu\,(p)} = R'\,(p)$$

donde

$$\mu\,(p) = \overline{\lim_{m+n}}\, \sqrt[m+n]{|\, a_{m,n} \,|\, p^n}$$

y diverge cuando una o las dos de estas desigualdades no se verifica.

Sea $P(x\,, x')$ la función real de la variable x y x' en el dominio

$$| x | < R\,(p) \qquad\qquad | x' | < R'\,(p)$$

por ella definida. Las dos series dobles

$$\sum_{1}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} m\, a_{m,n}\, x^{m-1}\, x'^n \quad , \quad \sum_{0}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} n\, a_{m,n}\, x^m \,.\, x'^{n-1}$$

tienen el mismo dominio de convergencia absoluta que la serie doble [1], y tienen por suma, a las derivadas parciales de $P(x\,, x')$,

$$P'_x\,(x\,, x') = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} m\, a_{m,n}\, x^{m-1}\, x'^n\,, \qquad [3]$$

$$P'_{x'}\,(x\,, x') = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} n\, a_{m,n}\, x^m\, x'^{n-1}\,. \qquad [4]$$

De aquí resulta, que la serie doble [1], es convergente en el dominio

$$| x | < R\,(p) \quad , \quad | x' | < R'\,(p) \quad -\infty < y < +\infty\,. \qquad [\alpha]$$

Si representamos las variables z y z', en sus respectivos planos coordenados, el dominio (α) está formado por dos fajas indefinidas, cuyos lados son simétricos a los ejes Oy y Oy', y cuya distancia a los mismos están dadas por las expresiones $R(p)$ y $R'(p)$.

A este sistema de fajas llamaremos *fajas asociadas de convergencia* y a los números $R(p)$ y $R'(p)$, los *radios asociados* de las fajas asociadas

La serie doble [1] define por su suma en el interior de un sistema de fajas asociadas de convergencia una función $f(z\,,z')$, de dos variables z y z' igual a,

$$f\,(z\,,\,z') \;=\; P\,(x\,x') \;+\; k\,[y\;P_x'\,(x\,,\,x') \;+\; y'\;P'_{x'}\,(x\,,\,x')]$$

Podemos formular el siguiente teorema:

Toda serie doble de potencia [1], *de coeficientes reales, converge absolutamente en el interior de un sistema de fajas de convergencia, cuyos radios asociados están ligados por las relaciones*

$$R\,(p) \;=\; \frac{1}{\mu\,(p)} \qquad R'\,(p) \;=\; \frac{p}{\mu\,(p)}$$

$$\mu\,(p) \;=\; \overline{\lim_{m+n\,\to\,0}}\;\sqrt[m+n]{\mid a_{m,n}\mid p^n} \qquad ,\quad (0<p<+\infty)$$

20. — Supongamos ahora que los coeficientes de la serie doble [1] sean números complejos duales

$$u_{m,n} \;=\; a_{m,n} \;+\; k\;b_{m,n}$$

Se tiene,

$$u_{m,n}\,z^m\,z'^n \;=\; (a_{m,n} \;+\; k\;b_{m,n})\;(x \;+\; k\;y)^m\;(x' \;+\; k\;y')^{\,n} \;=$$

$$=\; (a_{m,n} \;+\; k\;b_{m,n})\;(x^m\,x'^n + m\,k\,y\,x^{m-1}\,x'^n + k\,y'\,n\,x^m\,x'^{n-1}$$

de donde

$$u_{m,n}\,z^m\,z'^n \;=\; a_{m,n}\,x^m\,x'^n \;+\; k\;b_{m,n}\,x^m\,x'^n \;+$$

$$+\; a_{m,n}\,m\,k\,y\,x^{m-1}\,x'^n \;+\; a_{m,n}\,k\,y'\,x^m\,x'^{n-1}$$

y por tanto,

$$\sum_0^\infty\sum_0^\infty u_{m,n}\,z^m\,z'^n \;=\; \sum_0^\infty\sum_0^\infty a_{m,n}\,x^m\,x'^n + k\sum_0^\infty\sum_0^\infty b_{m,n}\,x^m\,x'^n +$$

$$+\,k\,y\sum_1^\infty\sum_0^\infty a_{m,n}\,m\,x^{m-1}\,x'^n + k\,y'\sum_0^\infty\sum_1^\infty a_{m,n}\,n\,x^m\,x'^{n-1} \qquad [2]$$

La serie doble de potencias

$$P(x, x') = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, x^m\, x'^n \qquad [3]$$

converge absolutamente, para todo valor de x de x', tal que

$$|x| < \frac{1}{\mu(p)} = R \;;\; |x'| < \frac{p}{\mu(p)} = R' \;;\; \mu(p) = \overline{\lim}\, \sqrt[m+n]{|a_{m,n}|\, p^n},$$

y no converge, si una de estas desigualdades no se verifica.

Las series derivadas

$$P'_x(x, x') = \sum_1^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, m\, x^{m-1}\, x'^n$$

$$P'_{x'}(x, x') = \sum_0^\infty \sum_1^\infty a_{m,n}\, n\, x^m\, x'^{n-1}$$

tienen, los mismos intervalos asociados de convergencia absoluta, que los de la serie doble anteriores.

En cuanto a la serie doble

$$Q(x, x') = \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{m,n}\, x^m\, x'^n, \qquad [4]$$

ella converge absolutamente, para

$$|x| < \frac{1}{\nu(q)} = R_1 \;,\; |x'| < \frac{p}{\nu(q)} = R_1' \;,\; \nu(q) = \lim \sqrt[m+n]{|b_{m,n}|\, q^n} \;;$$

y diverge para

$$|x| > R_1, \qquad \text{ó} \qquad |x'| > R'_1.$$

En consecuencia, fijado un valor para p y uno para q la serie doble [2] converge absolutamente en la faja asociada común a las series [3] y [4] y tiene por suma a la función

$$f(z, z') = P(x, x') + k\,[y\, P'_x(x, x') + y'\, P'_{x'}(x, x') + Q(x, x')]$$

21. — Sea la serie doble geométrica

$$f(z\,,\,z') = \sum_0^\infty \sum_0^\infty z^m\, z'^n = \sum_0^\infty \sum_0^\infty x^m\, x'^n +$$

$$+ k\left(y \sum_1^\infty \sum_0^\infty m\, x^{m-1}\, x'^n + y' \sum_0^\infty \sum_1^\infty n\, x^m\, x'^{n-1}\right) \qquad [1]$$

Las tres series dobles que figuran en el segundo miembro, son convergentes absolutamente, para

$$|\,x\,| < 1 \qquad |\,x'\,| < 1$$

y se tiene

$$\frac{1}{(1-x)\,(1-x')} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty x^m\, x'^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2\,(1-x')} = \sum_1^\infty \sum_0^\infty m\, x^{m-1}\, x'^n$$

$$\frac{1}{(1-x)\,(1-x')^2} = \sum_0^\infty \sum_1^\infty n\, x^m\, x'^{n-1}$$

y por tanto la [1], resulta

$$f(z\,,\,z') = \frac{1}{(1-x)\,(1-x')} + k\left[\frac{y}{(1-x)^2\,(1-x')} + \right.$$

$$\left. + \frac{y'}{(1-x)\,(1-x')^2}\right] = \frac{1}{(1-x)\,(1-x')} +$$

$$+ k\,\frac{y\,(1-x') + y'\,(1-x)}{(1-x)^2\,(1-x')^2} = \frac{1}{(1-z)\,(1-z')}\,.$$

22. Convergencia uniforme. — Consideremos la serie doble

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty u_{m,n}\, z^m\, z'^n\,, \qquad [1]$$

absolutamente convergente en un dominio D; la serie [1] *converge uniformemente* en D, si fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número p, tal que

$$\left| S - \sum_0^m \sum_0^n u_{m,n}\, z^m\, z'^n \right| < \varepsilon\,,$$

para $m\,, n > p$ y cualesquiera sean los valores de z y z', de D.

De la igualdad

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty u_{m,n}\, z^m\, z'^n = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, x^m\, x'^n + k \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{m,n}\, x^m\, x'^n +$$

$$+ k\,y \sum_1^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, m\, x^{m-1}\, x'^n + k\,y' \sum_0^\infty \sum_1^\infty a_{m,n}\, n\, x^m\, x'^{n-1} \qquad [2]$$

se deduce que: *la condición necesaria y suficiente para que la serie doble* [1] sea uniformemente convergente, es que converja uniformemente, las series doble de potencia

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, x^m\, x'^n \quad \text{y} \quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{m,n}\, x^m\, x'^n$$

y las variables y é y', sean acotadas.

Sea D una faja asociada de convergencia de la serie [1], y consideremos dos rectángulos de lados paralelos a los ejes coordenados y centros coincidentes con los orígenes de los ejes.

Las cuatro series doble reales que figuran en el segundo miembro de la [2], convergen uniformemente en el dominio D, por tanto la serie doble [1], converge uniformemente en el interior y sobre el contorno de dichos rectángulos.

23. SERIES DERIVADAS. — Dada la serie

$$f(z\ ,\ z') = \sum_{0}^{\infty}\ \sum_{0}^{\infty} u_{m,n}\ z^m\ z'^n \qquad [1]$$

convergente en una faja asociada de convergencia, las series que se obtienen derivando parcialmente, término a término

$$\sum_{1}^{\infty}\ \sum_{0}^{\infty} u_{m,n}\ m\ z^{m-1}\ z^n \quad [2] \qquad \text{y} \qquad \sum_{0}^{\infty}\ \sum_{1}^{\infty} u_{m,n}\ n\ z^m\ z'^{n-1} \quad [3]$$

llamaremos series doble derivadas primeras.

Las series [2] y [3] *tienen la misma faja asociada de convergencia de la* [1], *y sus sumas son respectivamente, las derivadas parciales.*

$$f_z'(z\ ,\ z') \qquad \text{y} \qquad f'_{z'}(z\ ,\ z')$$

De la hipótesis resulta según vimos

$$f(z\ ,\ z') = P(x\ ,\ x') + k\,[y\ P_x'(x\ ,\ x') + y'\ P'_{x'}(x\ ,\ x') + Q(x\ ,\ x')]$$

y como las series de potencias

$$P_x'(x\ ,\ x') = \sum_{1}^{\infty}\ \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}\ m\ x^{m-1}\ x'^n$$

$$P''_{x^2}(x\ ,\ x') = \sum_{2}^{\infty}\ \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}\ m\ (m-1)\ x^{m-2}\ x'^n$$

$$P''_{x,\,x'}(x,\ x') = \sum_{1}^{\infty}\ \sum_{1}^{\infty} a_{m,n}\ n\ .\ m\ .\ x^{m-1}\ x'^{n-1}$$

y

$$Q'_x(x\ ,\ x') = \sum_{0}^{\infty}\ \sum_{1}^{\infty} b_{m,n}\ n\ x^m\ x'^{n-1}\ ,$$

tienen el mismo intervalo asociado de convergencia, que la serie propuesta. Por tanto la serie derivada

$$f'_z(z\ ,\ z') = P'_x + k\,[y\ P''_x + y'\ P''_{x'x} + Q'_x] =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\ \sum_{0}^{\infty} m\ u_{m,n}\ z^{m-1}\ z^n$$

converge, en la misma faja asociada.

Igual conclusión se obtiene para la $f'_{z'}$ y las derivadas sucesivas.

Se puede enunciar el teorema:

La función $f(z, z')$ definida por la serie doble [1], *tiene en la faja asociada de convergencia, una sucesión ilimitada de derivadas parciales*

$$\frac{\partial^{m+n} w}{\partial z^m \cdot \partial z'^m},$$

que están definidas por las series derivadas correspondientes.

De aquí se deduce inmediatamente un desarrollo de Mac Lauren para la función $f(z, z')$.

CAPITULO III

a) SERIES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

24. — Consideremos una serie

$$\sum_0^\infty f_n(z) = \sum_0^\infty [\, u_n(x, y) + k\, v_n(x, y) \,] \qquad [1]$$

cuyos términos son funciones complejas,

$$f_n(z) = u_n + k\, v_n$$

de la variable compleja dual: $z = x + yk$.

Supongamos que la serie [1] sea convergente en todos los puntos de un cierto dominio D; ella define una función $f(z)$, de z, en este dominio. Se tiene

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_0^n f_i(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_0^n u_i(x, y) + k \lim_{n \to \infty} \sum_0^n v_i(x, y)$$

La convergencia es *uniforme* en D, si fijado un $\varepsilon > 0$, existe un número $N(\varepsilon)$ *independiente* de z, tal que

$$| f(z) - \sum_0^n f_i(z) | = | R_n(z) | < \varepsilon$$

para $n > N$.

La condición necesaria y suficiente para la convergencia simple o uniforme de la serie [1], *es que, las series de sus componentes converjan simple o uniformemente, respectivamente.*

Los criterios de convergencia uniforme de las series ordinarias subsisten también para las series de funciones de una variable, compleja dual.

TEOREMA VI. — *Sea una serie*

$$f(z) = \sum_0^\infty f_n(z)$$

de funciones continuas, uniformemente convergente en un dominio D; se tiene (1)

$$\int_c f(z)\, dz = \sum_0^\infty \int_c f_n(z)\, d\, z$$

donde c es una curva rectificable interior a D.

En efecto de la igualdad

$$f(z) = S_n(z) + R_n(z) \qquad [2]$$

donde $R_n(z)$ es el resto de la serie propuesta; resulta

$$\int_c f(z)\, d\, z = \int_c S_n(z)\, d\, z + \int_c R_n(z)\, dz\,. \qquad [3]$$

De la convergencia uniforme de la serie [1], a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario, corresponde un número $N(\varepsilon)$, tal que

$$| R_n(z) | < \varepsilon\,, \qquad \text{para} \qquad n \geq N$$

por tanto

$$\left| \int_c R_n(z)\, d\, z \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\, \varepsilon \int_c | d\, z | = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \varepsilon\,.\, l \qquad [4]$$

donde l es la longitud de la curva c.

(1) La noción de integral de una función de variable compleja dual y sus propiedades hemos dado en nuestro trabajo *La teoría de las funciones polígenas de una y de varias variables complejas duales.* « Contribución al Estudio de las Ciencias Físicas y Matemáticas », E. (3) (1936).

Según la desigualdad [4], la [3] nos da

$$\left| \int_c f(z)\, dz - \int_c S_n(z)\, dz \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \varepsilon\, l \quad \text{para} \quad n > N$$

de donde resulta

$$\int_c f(z)\, dz = \int_c f_0(z)\, dz + \int_c f_1(z)\, dz + \ldots$$

25. — Si los términos de la serie

$$\sum_0^\infty f_n(z) \qquad [1]$$

son funciones holomorfas dual, en el dominio D de convergencia; se tiene

$$f_n(z) = P_n(x) + k\,[y\,P'_n(x) + Q_n(x)]$$

por tanto

$$\sum_0^\infty f_n(z) = \sum_0^\infty P_n(x) + k\,y \sum_0^\infty P'_n(x) + k \sum_0^\infty Q_n(x) \qquad [2]$$

luego: *es condición necesaria y suficiente para que la serie converja simple o uniformemente en un dominio D que converjan simple o uniformemente las series reales*

$$\sum_0^\infty P_n(x) \qquad \sum_0^\infty P'_n(x) \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty Q_n(x)$$

y la variable y sea acotada.

El dominio de convergencia de una serie de funciones holomorfas dual, es siempre una faja paralela al eje imaginario. Sea

$$\sum_0^\infty f_n(z) \qquad [1]$$

una serie de funciones holomorfas dual; se tiene

$$\sum_0^\infty f_n(z) = \sum_0^\infty P_n(x) + k\left[y \sum_0^\infty P'_n(x) + \sum_0^\infty Q_n(x)\right]$$

Llamemos (a, b), (a', b') y (a'', b'') a los intervalos de convergencia de las series

$$\Sigma P_n(x) \qquad \Sigma P'_n(x) \qquad \text{y} \qquad \Sigma Q_n(x)$$

respectivamente. Si (α, β) es el intervalo común de estos tres intervalos, la serie [1], converge en todo punto $z = x + ky$ situado en la *faja,* cuyos lados son las rectas de ecuación $x = \alpha$ y $x = \beta$.

A esta faja llamamos *faja de convergencia* de la serie [1] y al número $\delta = |\beta| + |\alpha|$, *amplitud de la faja de convergencia.*

TEOREMA VII. — *La suma $f(z)$ de una serie de funciones holomorfas duales*

$$\sum_0^\infty u_n(z), \qquad [1]$$

uniformemente convergente en una faja D, es también holomorfa dual en D.

En efecto; de la convergencia uniforme de la serie [1], resulta que a todo $\varepsilon > 0$ corresponde un número entero $p = p(\varepsilon)$ tal que

$$|R_n(z)| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n \geq p\,. \qquad [2]$$

La serie [1] se puede escribir en la forma

$$f(z) = \sum_{i=0}^{p} u_i(z) + R_n(z)\,, \qquad [3]$$

e integrando los dos miembros de la [2] sobre una curva cerrada c de longitud finita L, toda ella contenida en el dominio D, se tiene

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c R_n(z)\,dz \qquad (n \geq p) \qquad [4]$$

puesto que

$$\int_c \sum_{i=0}^{p} u_i(z)\,dz = \sum_0^p \int_c u_i(z)\,dz = 0\,.$$

De la [4] se deduce, según la [2]

$$\left| \int_c f(z)\, dz \right| < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \varepsilon \cdot L ,$$

y como la integral del primer miembro existe, por ser $f(z)$ función continua en D, ella deberá ser nula por ser ε arbitrariamente pequeño, por tanto $f(z)$ es holomorfa dual en el dominio D.

Teorema VIII. — *Sea $f(z, x)$, una función de la variable dual z y de la variable real $x (a \leq x \leq b)$, y tal que para todo x de su intervalo, ella es función holomorfa dual de z en D, y*

$$f(z, x) \longrightarrow f(z)$$

uniformemente en D, cuando $x \to x_0$. La función límite $f(z)$ es holomorfa dual en D. En efecto; de la hipótesis resulta que a todo $\varepsilon > 0$ corresponde un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$| f(z, x) - f(z) | < \varepsilon \quad \text{para} \quad | x - x_0 | < \delta , \quad \text{y} \quad z \text{ de } D .$$

Sea c una curva cerrada simple de longitud L, contenida en D; se tiene

$$\left| \int_c f(z, x)\, dz - \int_c f(z)\, dz \right| \leq \int_c | f(z, x) - f(z) | \cdot | dz | < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \varepsilon L$$

Además es

$$\int_c f(z, x)\, dz = 0 ,$$

y siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, será

$$\int_c f(z)\, dz = 0 ,$$

luego $f(z)$ es función holomorfa dual en el dominio D.

b) SERIES DE POLINOMIOS

26. — Consideremos una sucesión $[p_n(z)]$ de polinomios de una variable compleja dual $z = x + ky$,

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

donde los coeficientes a_n son números reales complejos duales. Vamos a estudiar el campo de convergencia de la serie

$$\sum_0^\infty P_n(z) \qquad [1]$$

Supongamos en primer término que los coeficientes a_n sean números reales; se tiene entonces:

$$P_n(z) = a_0 (x + k y)^n + a_1 (x + k y)^{n-1} + \ldots a_n =$$

$$= a_0 (x^n + k \,.\, n\, x^{n-1} y) + a_1 (x^{n-1} + k (n - 1) x^{n-2} y) + \ldots + a_n$$

y separando la parte real de la imaginaria, resulta

$$P_n(z) = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) +$$

$$+ k y (a_0 n x^{n-1} + a_1 (n - 1) x^{n-1} + \ldots + a_{n-1})$$

es decir

$$P_n(z) = A_n(x) + k y A'_n(x)$$

donde $A_n(x)$ es un polinomio real de la variable real x y $A'_n(x)$ el polinomio derivado del $A_n(x)$.

La serie (1) se puede escribir en la forma

$$\sum_0^\infty P_n(z) = \sum_0^\infty A_n(x) + k y \sum_0^\infty A'_n(x)$$

Por tanto; *es condición necesaria y suficiente para que la serie* (1) *sea convergente, que la serie de polinomios reales* (series componentes)

$$[2] \qquad \sum_0^\infty A_n(x) \quad , \quad \sum_0^\infty A'_n(x) \qquad [3]$$

sean convergentes.

Si (a, b) y $(a' b')$ son intervalos de convergencia de las series de polinomios (2) y (3); y éstos intervalos tienen una parte común, la serie de polinomios (1′) converge en la faja indefinida *interferencia* de las dos fajas

$$F(x = a\,,\, x = b) \quad \text{y} \quad F'(x = a'\,,\, x = b')\,.$$

De aquí se desprende fácilmente los diversos casos que se pueden presentar, pudiendo en consecuencia formular la siguiente conclusión.

La serie de potencia de una variable compleja dual a coeficientes reales, converge en una faja indefinida, de lados paralelos al eje 0 y.

Consideremos ahora el caso más general que los coeficientes de los términos del polinomio sean complejos duales

$$a_n = \alpha_n + k\,\beta_n$$

Se tiene

$$\sum_0^\infty P_n(z) = \sum_0^\infty (\alpha_n + k\,\beta_n)\,(x + k\,y)^n =$$

es decir

$$\sum_0^\infty P_n(z) = \sum_0^\infty A_n(x) + k \sum_0^\infty B_n(x) + k\,y \sum_0^\infty A'_n(x) \qquad [1'']$$

donde

$$A_n(x) = \alpha_0\,x^n + \alpha_1\,x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

$$A'_n(x) = n\,\alpha_0\,x^{n-1} + (n-1)\,\alpha_1\,x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}$$

$$B_n(x) = \beta_0\,x^n + \beta_1\,x^{n-1} + \ldots + \beta_n$$

La serie [1″] es convergente para todo punto $z = x + k\,y$ interior a la faja de interferencia de las tres fajas paralelas al eje Oy. y cuyos

lados pasan por los extremos $(\alpha\ ,\ b)$, $(a'\ ,\ b')$ y $(a''\ ,\ b'')$ de los intervalos de convergencia respectivos de las series de polinomios reales

$$\sum_0^\infty A_n\ (x) \qquad \sum_0^\infty A_n'\ (x) \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty B_n\ (x)\ .$$

En toda la faja de convergencia, la serie de polinomio

$$f\ (z) = \sum_0^\infty P_n\ (z)$$

define una función $f\ (z)$, de la variable compleja dual z.

En el capítulo que sigue nos ocuparemos de las series de Dirichlet del tipo general

$$\sum_0^\infty a_n\, e^{-\lambda_n z} \quad , \quad \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,\,n}\, e^{-\lambda_n z + \mu_n z'}$$

de las variables complejas duales

$$z = x + ky \quad , \quad z' = x' + ky'.$$

(Continuará)

LA EXPEDICION DE DON PEDRO DE MENDOZA Y LA FUNDACION DE BUENOS AIRES

POR

JOSE TORRE REVELLO

El derecho a la ocupación de las riberas del Plata, que se disputaban Portugal y España, a raíz de la expedición de Nuño Manuel hecha en nombre de la nación lusitana en 1514, y la de Juan Díaz de Solís, que enarbolando el pendón de Castilla, surcó las aguas del estuario en los primeros meses del año 1516, hizo crisis a raíz de conocerse en Lisboa en octubre de 1528 la llegada de los emisarios de Sebastián Caboto, llamados Jorge Barlow y Hernando Calderón, quienes dieron en la capital lusitana, al embajador español, informaciones tan extraordinarias de las tierras de donde acababan de llegar que enseguida se comentaron en Lisboa, dando origen a que el gobierno portugués organizase de inmediato una expedición, que puso al mando de Martín Alfonso de Sousa, con el propósito de hacer valer su soberanía en ambas márgenes del río Solís, el que según diversas referencias conducía directamente a la fabulosa Sierra de la Plata, en cuya conquista habían fracasado las expediciones de Sebastián Caboto y Diego García de Moguer.

En plena organización se encontraba la expedición de Sousa, cuando el monarca portugués recibía confidencialmente la noticia de que había arribado a Sevilla el piloto Sebastián Caboto, con quién habían retornado algunos portugueses, entre ellos, Enrique Montes, náufrago de la expedición de Solís, y el después famoso piloto Gonzalo de Acosta, que durante muchísimos años había vivido en San Vicente; ambos conocían las lenguas de los indios, y las sugestivas referencias que corrían entre los naturales de las costas del Brasil, sobre el llamado Rey Blanco, el inca de los peruanos, y de la famosa Sierra de la Plata, ubicada en tierras de los caracaraes, nombre con que eran designados los peruanos en el armonioso idioma guaraní, al decir de Manuel Dominguez.

Enrique Montes, enseguida, ofreció sus servicios para integrar la expedición preparada en Lisboa; no así Gonzalo de Acosta, que después de haber estado en la capital lusitana, adonde había ido al ser llamado por su monarca, resolvió huir con rumbo a Sevilla, en donde después de arribar, dió cuenta a las autoridades españolas de los propósitos que guiaban al monarca portugués, de conquistar aquellas tierras de las que se tenían tan fabulosas referencias, y que hacían sospechar la existencia de un imperio tan rico, como el que años antes, había conquistado Hernán Cortés para la corona de España.

Pasaremos por alto las discusiones diplomáticas que se originaron sobre estos hechos, las que por otra parte no pudieron retener la salida de la expedición de Martín Alfonso de Sousa, que se dió a la vela el 3 de diciembre de 1530.

Después de algunas peripecias y después de haber perdido numerosos hombres, que partieron por tierra desde la Cananea con el propósito de alcanzar la sugestionante Sierra de la Plata, la armada de Sousa sufría la pérdida de la nao capitana, en un temporal que la alcanzó en las cercanías de Chuy, en el actual límite fronterizo entre las repúblicas del Uruguay y del Brasil. Desde ese lugar destacó el jefe portugués a su hermano Pero Lopes de Sousa, para que con un bergatín recorriese la costa oriental del estuario con el objeto de inquirir noticias relacionadas con esa fabulosa Sierra, que alcanzarían después otros hombres más afortunados, penetrando por la ruta del Pacífico, y que tantos hombres costaría a España, que se empeñaron en alcanzarla siguiendo la ruta de los grandes afluentes del Plata.

El bergantín de Pero Lopes de Sousa, partió del Chuy y el 23 de noviembre de 1531, recalaba al pié del cerro de Montevideo. Siguiendo su exploración, penetró por el Paraná Guazú, hasta alcanzar el brazo del Bravo, recorriendo durante varias días los riachos del delta, hasta que el 13 de diciembre resolvio poner proa hacia la desembocadura del Plata.

De su ligera excursión por el estuario dejó Pero Lopes de Sousa constancia colocando elegantes padrones de piedra, que ostentaban, tallados, el escudo de la nación portuguesa, y que en el correr de los años, serían hallados por hombres que militaban bajo el pendón de Castilla, alarmando seriamente a los monarcas hispanos. Con esos padrones pretendía justificar la nación lusitana que había tomado posesión del Plata, al considerar que éste, entraba bajo su jurisdición dentro de la línea de demarcación fijada en 1494 en Tordesillas, entre los plenipotenciarios de ambas naciones, España y Portugal.

Los preparativos y la salida de la expedición de Martín Alonso

de Sousa, no pasaron desapercibidos para la corona de España, que constantemente recibía de su embajador en Lisboa, noticias que éste adquiría por diversos conductos, lo que dió origen para que de inmediato se organizase una armada que contrarrestase la acción que pretendía desarrollar Portugal.

Hay constancia documental, de que ya en 1532, se estaba organizando la armada, que tres años más tarde, habría de salir de Sanlúcar de Barrameda, bajo el mando supremo del primer adelantado del Río de la Plata, el granadino don Pedro de Mendoza.

*

Las gestiones que hicieran para realizar la conquista del Río de la Plata, el comendador Miguel Herrera, vecino y alcalde de Pamplona y el adelantado de las islas de Canarias, don Pedro Fernández de Lugo, fracasaron sin causas que lo justifiquen; el último de los citados incluso había puesto en juego la influencia del presidente del Consejo Real de las Indias, don García Fernández Manrique, conde de Osorno; sin embargo, Fernández de Lugo llegó a recibir reiteradas invitaciones, en nombre del rey, para que pasase a la corte o enviase en su lugar un emisario con «poder bastante», y a fin de concedérsele la capitulación que le autorizase suficientemente la deseada conquista. La noticia que se extendió por España, a raíz de haber arribado al puerto de Sevilla un navío el 5 de diciembre de 1533. que era portador de cuantioso tesoro procedente de la conquista del imperio de los incas, hecha por huestes de Francisco de Pizzarro, soliviantó las ansias y la codicia de muchos hombres, que pretendían emular con sus hechos a aquellos otros afortunados que habían abatido al poderoso monarca peruano, enriqueciéndose de manera tan rápida y en forma tan fantástica, que más bien parecían leyendas los relatos que se hacían de la conquista de ese poderoso reino, que hechos verídicos alcanzados por un puñado de hombres con suma astucia, y con procedimientos, que ni el tiempo, ni la circunstancia y forma como se realizó, pueden justificarse ante la historia.

Los tesoros y ricas joyas que iban desembarcando otros navíos enviados por los conquistadores del Perú, fué el acicate que decidió a la corona de España a conceder a don Pedro de Mendoza, una capitulación datada en Toledo a 21 de mayo de 1534, por la que se le concedía la conquista y población del Río de Solís, que ya era llamado de la Plata, en los mismos documentos españoles, como también lo expresa el documento referido.

Dos eran los principales objetivos que iba a tener la expedición, que al mando de Mendoza, habría de venir a recalar en nuestras playas. La primera de carácter internacional, o sea la de tomar posesión de nuestro estuario y sus costas en nombre de la corona de España, y consolidar con acción ejecutiva su soberanía legal, soberanía siempre puesta en duda y discutida por Portugal; la segunda, de más importancia para los fines particulares del adelantado, era la de conquistar la legendaria Sierra, que tantas victimas ya había causado con el imán de sus sugestionantes riquezas. Los capitanes del adelantado, a poco después de firmarse la capitulación, comenzaron a recorrer con bandera de enganche, a voz de pregonero y ruidosis redobles de tambores, las villas y pueblos de Andalucía y de otras regiones colindantes a ella, ofreciendo puestos de soldados en las filas de la expedición.

Muchos más sin embargo, fueron los afanosos de riquezas que se presentaron expontáneamente en los cuarteles de Sevilla para incorporarse y así fueron integrándose las filas de la expedición con hombres procedentes de casi todas las regiones de España; y entre los extranjeros que se incorporaron hay constancia de que se enrolaron flamencos y portugueses en gran número, y en cantidad más reducida alemanes, ingleses, ital anos y griegos.

*

Por el artículo 7 de las capitulaciones otorgadas a don Pedro de Mendoza, se estipula en forma clara, cuales eran los derechos o impuestos que se debían ingresar a favor de la corona, con motivo de la prisión o muerte de «algún príncipe o Señor principal».

Tres fortalezas de piedra debía levantar don Pedro de Mendoza en las tierras de su mando, en los lugares que más convinieran para la conquista del suelo y se le prometía entre otras gracias a su favor, cuando el éxito coronase su empresa, un título de conde y diez mil indios como vasallos tributarios.

Entre las obligaciones que contraía don Pedro de Mendoza, se le señalaba la de llevar relig osos, frailes y clérigos, con el fin de destinarlos a la conversión y adoctrinamiento de los naturales de las tierras que alcanzase a dominar con sus hombres.

*

Se ignora cuando y como, el adelantado contrajo un terrible mal, conocido por el «morbus galico», que habría de llevarlo a la tumba y el que a la vez sería causante de la constante depresión de su espí-

ritu. Muchos meses antes de la partida de la expedición, ya se había visto obligado a guardar cama, y hasta circuló el rumor de que había desistido de lanzarse a la empresa temeroso de morir en la larga travesía, sin embargo, Fernández de Oviedo, que entonces se hallaba en Sevilla y que conoció personalmente al adelantado, destruye con sus informes ese rumor, diciendo que Mendoza había sido aconsejado que no se pusiera en viaje dado al estado delicado de su salud, pero que aquel temeroso de perder el crédito y cuanto había gastado en la organización de la expedición, resolvió «ponerse a lo que viniere; y proced'ó adelante con la gente».

En la organización de la armada, tuvo activa participación el maestre de campo Juan de Osorio, a quién don Pedro de Mendoza confió el enganche de hombres.

Refiriéndose a la activa participación que Osorio tuvo en los preparativos de la expedición fundadora, nos dice Fernández de Oviedo en su conocida *Historia*, que merced a su «buena maña é diligencia avia [Osorio] en Sevila sostenido el armada, e sin él nunca don Pedro la pudiera colmar, porque era muy seco é no sabía tractar gente en paz ni en guerra».

Este sintético y fiel retrato del primer adelantado del Río de la Plata, se confirma con su actuación posterior, al entregarse más bien por el estado de su espíritu, vencido y decaído, que a la endeblez de su carácter, a un grupo de ambiciosos y aduladores, que le festejaban sus bromas y que iban a la vez soliviantando su espíritu, hasta convertirle en instrumento de sus propias ambiciones.

*

Después de haberse cumplido el plazo dado a Mendoza para lanzarse a la vela, y de habérsele prorrogado su salida por algunos meses más, se recibió en la corte de España una información enviada por el embajador en Lisboa, en la que éste daba cuenta de estarse preparando una expedición, cuyo destino según se decía públicamente, era la conquista del Río de la Plata. Ante una noticia tan alarmante, se dió orden a don Pedro de Mendoza de que activara los apuestos de su armada, diciendosele que no habiendo cosa que se lo impidiera, zarpara el 1 de agosto de 1535.

Don Pedro de Mendoza, ante las noticias y rumores que circulaban en desprestigio de su persona, a las que se sumaban las graves noticias recibidas de Portugal, dió mayor actividad a la organización de su empresa y el 24 de agosto, zarpaban de Sanlúcar de Barrameda,

en la desembocadura del Guadalquivir, los primeros navíos de su armada con rumbo a las islas Canarias.

Tenemos varias razones para suponer que las naos de la armada de don Pedro de Mendoza no zarparon todas en la misma fecha, por cuya causa, hasta nuestros días quienes se ocuparon de ella, han reducido el número de las unidades que la componían.

Podemos aseverar, con pruebas que serán dadas en su tiempo, que contando la urca de Schmidel, eran doce, las embarcaciones que partieron casi simultáneamente de Sanlúcar y Cádiz. El 13 de septiembre partía retrasada tras de la armada, la nao *Santiago*, de la que era capitán Cristóbal Frias Marañón, quién habría de valerse de diversos suterfugios para no darle alcance en las islas Canarias. Frías Marañon después de tocar con su navío en las islas de Cabo Verde cambió rumbo, yendo a parar finalmente de arribada a la isla de Santo Domingo.

A los doce navíos que formaron el principal convoy de la armada del adelantado, se le incorporaron en las Canarias, tres navíos más que le cedió en venta a Mendoza el adelantado Pedro Fernández de Lugo, sumando en un total quince unidades las naos que partieron de dicho lugar en los primeros días de octubre con dirección a las islas de Cabo Verde, en donde después de renovar las aguas y cargar bastimentos, ya desengañado el adelantado de que la *Santiago* no le daría alcance, se lanzó con los quince navíos, que en esa circunstancia integraba su armada, con rumbo hacia el Atlántico sur.

Un recio temporal sufrió en la navegación la armada de Mendoza a la altura del Cabo San Agustín, dispersando los navíos. Una de las unidades más pequeñas, fué a dar de arribada al río Marañón, en tierras donde moraban los indios pitiguales que practicaban la antropofagía, quienes cautivaron a sus tripulantes y los devoraron. Los que marcharon al Río de la Plata, nunca supieron el trágico fin de sus compañeros, y en España se tuvo noticia de ese suceso por una información que enviara el embajador en Portugal, fechada el 16 de julio de 1536, cuando hacía pocos meses que Mendoza poblaba con su gente el pueblo de Buenos Aires.

*

Bien conocido es el trágico drama desarrollado en la bahía de Guanabara, en Río de Janeiro, en que de manera alevosa fué ultimado el maestre de campo Juan de Osorio, de la que fué mentor y ejecutor principal Juan de Ayolas, llamado por el piloto portugués Gonzálo de Acosta el «envidioso». La desaparición de Osorio la habría de

lamentar, lloroso, el propio don Pedro de Mendoza, que había decretado su muerte por una inicua sentencia que suscribiera.

*

En las islas de San Gabriel se hallaban anclados —bajo el mando de Diego de Mendoza, hermano del adelantado— los navíos de la expedición que no recalaron en Río de Janeiro; sus tripulantes y parte de sus pasajeros se hallaban entregados a la construcción de algunos barquichuelos, que se proponían utilizar en futuras exploraciones, cuando en los primeros días de enero fondeaban en el lugar cuatro navíos que venían retrasados.

Ambos hermanos Mendoza, se comunicarían entre sí las novedades de la navegación, a la vez que entre sus tripulantes y expedicionarios se iban difundiendo las referencias del sangriento drama desarrollado en la bahía de Guanabara. Se temía entonces y con razón que muchos soldados intentaran desertar, abandonando la conquista, cansados de ser vilipendiados continuamente, por lo que se resolvió con el fin de cortarles cualquier intento de fuga hacia las costas del Brasil, poblar sobre la banda occidental del Plata, aprovechando a la vez esa posición con el fin de poder abrir algún día el camino hacia el reino del Perú.

*

Para buscar el lugar más apropósito donde hacer puerto y pueblo en la banda occidental fué comisionado el piloto portugués Hernando Báez, quién según su propio decir no pudo hallarse mejor lugar que aquel en que después se levantó el pueblo.

Hallado el lugar conveniente, a raíz de la exploración que hiciera Báez, los catorce navíos que formaban en ese momento la armada de don Pedro de Mendoza, pusieron sus proas con dirección a nuestras playas.

Conviene, antes de proseguir refiriendo las distintas etapas relacionadas con el pueblo que fundara Mendoza, que digamos algo sobre quienes venían embarcados en sus naves.

Según Fernández de Oviedo, que conoció en Sevilla a muchos de los componentes de la expedición, dice de los mismos, que eran «muy hermosa e lucida gente y, muy bien armados y proveydos». Entre esos hombres, había individuos que ostentaban el tratamiento «de don» y otros que eran descendientes de ilustres casas, amigos o compañeros del adelantado, en aquellas famosas andanzas con las huestes españolas, que invadieron y saquearon a Roma en 1527.

Entre la gente de rancia estirpe, figuró un hermano de aquella admirable mujer, que hoy muestra su imagen en los altares de los templos católicos con el nombre de Santa Teresa de Jesús. Se llamaba, Rodrigo de Cepeda, hijo, —según reza en la lista de pasajeros que se asentaron en la casa de la Contratación— de Alonso Sánchez de Cepeda y de doña Beatriz de Ahumada. Este infortunado hermano de la Santa, tenía cuatro años más que ella, y fué uno de los que pronto habrían de sucumbir en estas tierras de infieles.

De la familia del adelantado, además de su hermano Diego, figuró también su sobrino Pedro de Benavides. Ambos habrían de morir el mismo día y en la misma acción de guerra contra los naturales, en el conocido combate de Corpus Chisti.

Entre los hombres, que consideramos como de más confianza con el adelantado, se encontraba el siniestro y perverso Juan de Ayolas, a quién designó el adelantado como su sucesor en la conquista; cargo este que nunca llegaría a ocupar Ayolas; como sabemos, después de alcanzar este lugarteniente de Mendoza, la llamada Sierra de la Plata, tendría por tumba las selvas chaqueñas, sacrificado a traición por bárbaras tribus que exterminaron a todos sus compañeros, y a muchos de los indios auxiliares que les acompañaban.

Ayolas fué el único de los embarcados en la expedición que extendió poderes en Sevilla para que sus representantes pudieran recabar de la Contratación, los metales y piedras preciosas que enviase desde las Indias. Este siniestro personaje, que salió de España en calidad de criado y mayordomo de don Pedro de Mendoza, ostentando a la vez el cargo de alguacil mayor, habría de alcanzar tal ascendencia sobre su persona que con procedimientos condenables conseguiría convertirlo fácilmente en un instrumento de sus perversas ambiciones haciéndole firmar una inicua sentencia de muerte contra el maestre de campo Juan de Osorio, que él mismo se encargaría de ejecutar, traidoramente, con puñal en mano, hasta conseguir arrancarle el alma del cuerpo. Sus ambiciones de riquezas, no le hacían detener en sus propósitos, sacrificando a cuantos le pudieran molestar en alcanzar los fines que se proponía.

Oigamos lo que dijo el clérigo Luis de Miranda Villafaña, en su doloroso romance de la conquista del Río de la Plata, al referirse al hecho recordado:

Y comenco la traydora
tan a ciegas y siniestro
q luego mata al maestro
q tenia
Joan osorio se dezia
el valiente capitan
Joan de ayolas y luxan
y medrano.
Salazar por cuya mano
tanto mal nos sucedió
dios aya quien lo mando
tan sin tiento
tan sin ley y fundamento
con tan sobrado temor
con tanta envidia y rrencor
y covardia.

Rencor sentía Ayolas contra Osorio, por las gallardas dotes de hombre de guerra, aunque como es sabido era algo bravucón y dicharachero. Cobardía había también en su espíritu por los viles procedimientos usados contra Osorio para eliminarle.

Muchos otros personajes figuraban en las listas de los conquistadores, que inscribieron sus nombres en la historia por la intervención que tuvieron en algunos de los episodios más destacados; citaremos entre ellos al capitán Francisco Ruiz de Galán y al capitán Juan Salazar de Espinosa, el fundador de la ciudad de la Asunción.

Los cronistas Ulrich Schmidel, Francisco de Villalta, Pero Hernández, y tantos otros que en páginas llenas de dolor humano, testimonian hechos y documentan acciones; pero de entre toda esa gente acuciada «por vanidad como por codicia de oro y plata», al decir de cierto relator de hechos acaecidos en la conquista, merece, citarse señalando a la vez sus altas dotes de caudillo, el vizcaino Domingo Martínez de Irala, brazo ejecutor de la despoblación de Buenos Aires que consiguió imponerse a los diezmados conquistadores por su audacia y tesón.

Entre las mujeres venidas en la expedición, si esceptuamos la esposa del piloto Gonzálo de Acosta, y a María Sánchez, que lo era de Juan Salmerón, las otras al decir de cierta información levantada en la Asunción, hacían una vida nada morigerada en la primitiva Buenos Aires.

Entre las que han dejado constancia documentales de su existencia, se registran los nombres de Catalina Pérez y María Dávila, criadas del adelantado. La última de las citadas, al parecer, fué contagiada del mal que padeció don Pedro, por lo que éste, en uno de los codicilos que extendiera a bordo de la *Magdalena*, cuando iba de retorno a España, encargaba a sus albaceas, que en llegando a Sevilla les dieran la suma de dinero que estimasen para que María Dávila se pudiera curar.

Elvira Hernández o Pineda, también figura como criada, al servicio del inmolado Juan de Osorio. Otro nombre de mujer más, Isabel de Guevara, de la que se conoce una carta escrita veinte años después de fundar el pueblo Pedro de Mendoza, en la que si admitimos como ciertas las referencias que en ella se hacen, las mujeres debían sumar un número bien considerable, pues al decir de la Guevara «todos los travajos, cargavan de las pobres mugeres; ansi en lavarles las ropas como en curarles, hazerles de comer lo poco que tenían, alimpiarlos, hazer sentinela, rondar los fuegos, armar las vallestas», y sobre todo a «dar arma por el campo, a bozes, sargenteando y poniendo en orden los soldados».

Muy mal parados quedan los conquistadores, si nos damos por convencidos de cuantas proezas cuenta la varonil esposa de Pedro de Esquivel, con quién debió contraer enlace en la Asunción, después de ser despoblada Buenos Aires, y a ella, sin duda, se referiría cierto recatado testigo en una declaración que hiciera al citar cierta mujer, cuyo nombre no pronunciaron sus labios por ser en aquel entonces mujer casada.

A pesar de haberse recomendado especialmente a los religiosos de la orden de Poverino de Asis para que embarcaran con don Pedro de Mendoza, con el propósito de difundir la doctrina de Cristo entre los naturales del Río de la Plata, lo cierto es que, entre los conventuales que con la expedición vinieron, no figuró ningún religioso fransciscano.

En cambio los mercedarios, contaron con los PP. Juan de Salazar y Juan de Almacian. Al primero de los citados, por la ascendencia espiritual que tuvo sobre diversos personajes de relieve en la expedición, nosotros en varios escritos le hemos atribuído cierta intervención en el bautizo del lugar, bajo la advocación de Nuestra Señora Santa María del Buen Aire. *I*arios religiosos Jerónimos, un tal Cristóbal, completaban la lista de los representantes de las órdenes monásticas, que vinieron con la armada.

Los clérigos sobrepasaron en corto número a los frailes profesos,

y sus nombres han sido registrados en varios documentos. Fueron ellos, Juan Gabriel de Lazcano, el primer cura que ofició en la población fundada por Mendoza; el ya recordado Luis de Miranda Villafaña; Francisco de Andrada; Juan de Santander; Julián Carrasco, el primer cura párroco de la iglesia del Espíritu Santo levantada en Buenos Aires en el interinato de Francisco Ruiz de Galán; Francisco de la Fuente que regresó a España en la nao en que murió el adelantado; Diego de Quintanilla que después en Santo Domingo dió valiosos informes al cronista Fernández de Oviedo, Francisco Sánchez Baradero y el bachiller Martín de Armencia.

El computo total de los expedicionarios que vinieron embarcados en la armada de don Pedro de Mendoza no puede señalarse con exactitud. Si descartamos el dato erróneo del cronista Antonio de Herrera y de sus seguidores, diversos testigos emiten cifras que oscilan entre 1500 hombres hasta 2650 que señala Schmidel.

Si tenemos en cuenta que de los diez y seis navíos que integraban la expedición, sólo arribaron a nuestras playas catorce; sobre un total de 2000 hombres que nosotros fijamos como el de los componentes de la misma, a su partida de Canarias, incluyendo en esa suma también a los hombres que desertaron con la *Santiago* podemos aseverar, con muchas probabilidades de acertar, que en Buenos Aires desembarcaron 1700 hombres, cantidad que Ruy Díaz de Gúzman la reduce a 1200.

Es digno de señalarse que la edad de los expedicionarios, en su mayor parte, fluctuaba entre los 15 á 30 años. Jóvenes soñadores, que se lanzaban tras vaporosas quimeras, y a quieñes la realidad, con su duro contraste, convirtió enseguida en héroes anónimos de una atrayente ilusión.

*

Pedro de Mendoza, después de pisar tierra en nuestras playas, pasó revista a sus hombres, antes de proceder a levantar el pueblo o real, cuyo acto puede calcularse que fué iniciado entre los días 2 y 3 de febrero de 1536. Al lugar que fundara, como ya lo hemos referido, le fué impuesto el nombre de Nuestra Señora de Santa María del Buen Aire, advocación que era familiar a los curtidos marinos, que la invocaban llenos de fervor en sus horas de amarguras y de desaliento. Dicha advocación tuvo su origen en Cagliari, capital de la isla Cerdeña, en 1370. De Cerdeña, posesión de los reyes de España, fueron difundidos sus milagros a lo largo de las costas del «Mare Nostrum».

Como una consagración fervorosa, cuando Sevilla multiplicaba sus actividades navieras, los mareantes que traficaban con América, entonces para España ricas Indias Occidentales, resolvieron fundar en Sevilla una cofradía, consagrándola a su numen tutelar, llevándola a la práctica èn 1561, o sea un cuarto de siglo más tarde que su advocación se impusiera al primer lugar o población levantada por don Pedro de Mendoza.

*

Para fijar con alguna precisión el lugar en que se fundara la primitiva Buenos Aires, vamos a proceder en forma lógica sin sugestiones extrañas.

Conviene ante todo, tener en cuenta, que en las Ordenanzas de Poblaciones de 1523, se mandaba, que los pueblos «que de nuevo se hicieren, se ha de mirar que sean en sitios sanos y no anegadizos». Ya hemos referido que desde San Gabriel, don Pedro de Mendoza comisionó al piloto Hernando Báez, para que recorriese nuestra costa a fin de buscar el lugar más a propósito en el que hacer población. El propio Báez, manifestó en cierta declaración que hiciera en la Asunción, que el sitio que se eligió fué el mejor que se encontró «e no se pudo hallar ni halló otro mejor asiento ni tal como la parte donde fué asentado». Como vemos, esta declaración concuerda perfectamente en su espíritu con lo que se mandaba en las Ordenanzas que antes hemos recordado.

Para no singularizarnos en la prueba vamos a citar, con el propósito de dilucidar el problema, lo que declararon algunos de los testigos que asistieron a la fundación. Empezaremos por el flamenco Simón Jacques, quien manifestó que «vido asentar pueblo e puerto en el ... rrio parana», que debe aclararse es el de la Plata; lo mismo afirman el clérigo Miranda, el capitán Juan Romero, Rodrigo Gómez y el mercedario fray Juan Salazar. Este último agregó, por otra parte, al referirse a la despoblación de Buenos Aires, que ñno vido que [Irala] dexase en el dicho rrio parana otro puerto alguno»; finalmente citaremos otros testimonios, repitiendo la declaración de Gonzalo de Arévalo, quien manifestó, que «vido fundar e asentar el dicho pueblo e puerto en el dicho rrio parana».

En el momento de fundar Mendoza a Buenos Aires, corría a lo largo de la costa, un canal de cierta profundidad, entre la playa y las toscas del río, como es fácil observarlo en los planos de la ciudad ejecutados en el siglo XVIII, canal que se desviaba hacia el interior del río en las cercanías de la actual calle Victoria, hasta perder-

se a la altura del Retiro. En las postrimerías de ese siglo, el mencionado canal, que fué puerto y refugio de las naves de Mendoza, se hallaba en parte cegado; por entonces a fines del siglo XVIII se diseña otro canal que se abría diagonalmente hacia el nordeste, más allá de los bancos de toscas, que se extendían a varias cuadras de la ribera.

La existencia del canal a que nos hemos referido, lo confirma una declaración del piloto Hernando Báez hecha en 1539, en donde decía: en «este puerto pueden entrar en el navíos de occhenta toneles e de ciento cargados, y este testigo vido que entro la nao *Santa Catallina* cargada que hera nao de ciento y quarenta toneles y que la nao que se perdio de pancaldo y la que truxo alonso de cabrera no se perd eron con tormenta sybno por que no syguieron la canal y por no traer batel para alargar ancla».

Por todo lo aducido, y por los meritorios aportes hechos recientemente por destacados hombres de estudio, podemos afirmar, sin temor a yerro, que el pueblo levantado por don Pedro de Mendoza, tenía su emplazamiento en el sitio que actualmente ocupa el Parque de Lezama, extendiéndose en lo alto de la meseta con dirección hacia el norte y su puerto natural se ubicaba al pié del poblado junto al canal.

*

Mientras en el primitivo pueblo de Buenos Aires no se dió término a la cerca de adobe y al foso que a su alrededor se hiciera, para su mejor defensa, los expedicionarios pernoctaron a bordo de los navíos, para evitar la acechanza de los naturales, que habilmente con certeros golpes de las boleadoras les hacían sentir sus mortíferos efectos, o bien los ataques temibles de las onzas o gatos monteses que ya cebados con la carne humana, diezmaban a los pobladores.

Construido el recinto, se comenzaron a levantar chozas de adobe, que se techaron de paja; para el adelantado se construyó una casa fuerte, que sin duda no sería más sólida que la parte restante del caserío.

Hay constancia también de que se dedicó un solar para plaza púpública, junto al chozo que servía de iglesia.

Desde los primeros momentos de fundarse Buenos Aires, el hambre mostró su siniestra figura por lo que después de haberse reducido la ración entre sus habitantes hubo necesidad de despachar el 3 de marzo, al navío *Santa Catalina*, al mando de Gonzalo de Mendoza hacia las costas del Brasil, en busca de bastimentos.

*

Seis años después de ser fundada Buenos Aires, se efectuaría su despoblación, con el objeto de concentrar las diezmadas fuerzas expedicionarias en la Asunción, lugar elegido entonces como base de operaciones, por aquellos esforzados hombres, a quienes la codicia de alcanzar las tierras, donde brotaban los metales, les hacían realizar proezas sobrehumanas, muy superiores por sus reveses, a aquellas conquistas alcanzadas por Hernán Cortés y por Francisco Pizarro, que engrandecieron sus nombres por los imperios que subyugaron, pero no por los sufrimientos y fracasos, que expedición tras expedición acechaban a los lucidos hombres, que formaron en las huestes del primer adelantado del Río de la Plata, don Pedro de Mendoza, natural de Guadix, en el reino de Granada.

*

Treinta y nueve años más tarde, debía resurgir de nuevo Buenos Aires, sobre las ruinas de su primitivo emplazamiento, entonces como una necesidad imperiosa, buscando, al decir de la feliz frase de Juan de Garay «puertas a la tierra». Retornaban a la repoblación, los descendientes de aquellos férreos espíritus de la primer hora, entre ellos un sólo sobreviviente de las huestes de Mendoza, el portugués Antonio Thomás, reliquia viviente de aquel largo proceso histórico, que se inicia en su despoblación de 1541 y se finaliza en la fundación que bajo el nombre hace tiempo olvidado, de la Santísima Trinidad ejecutara Juan de Garay en 1580.

*

A partir de ese momento, no soñarían los repobladores de Buenos Aires, en los sugestionantes metales que enloquecían a los hombres, llenándolos de codicias y ambiciones; todo el anhelo se consagraría entonces, a hacer productivas las inmensas llanuras que la circundaban, don precioso que la naturaleza brindaba al esfuerzo constante de los hombres, como premio generoso y noble recompensa a sus afanes y trabajos.

TRATAMIENTO DE LA TUBERCULOSIS PULMONAR POR LA SOBREALIMENTACION

Por P. MAGNE DE LA CROIX

Resumé

De tous les modes de traitement employés en cas de tuberculose pulmonaire, le seul qui donne un resultat positif net, est celui denommé suralimentation. Pourquoi ces bons resultats limités aux cas de tuberculose pulmonaire?

Parce que cette suralimentation est en realité une alimentation surchargée dans le sens negatif et qui rétablit le deséquilibre nécessaire que ne peuvent plus maintenir les poumons malades.

Uno se pregunta ¿Por qué la sobrealimentación a menudo empleada con éxito en caso de tuberculosis pulmonar no da ningún resultado si la tuberculosis es localizada en otras partes del organismo? Por lo general no se busca demasiado la comprensión del hecho, se le constata y basándose sobre los buenos resultados obtenidos se sigue aplicando el método.

Sin embargo la determinación es interesante y me parece que gracias a los trabajos de Vassiliey y Tchijevsky sobre la admisión de iones negativos y positivos por el pulmón y a los mios sobre el papel de las cargas, de corrientes sin hilos y con hilos en el organismo se puede muy bien llegar a determinar el porqué de los buenos resultados obtenidos con la aplicación de dicho método y por consiguiente llegar a elegir muy juiciosamente los alimentos que conviene dar al enfermo.

Se concibe muy bien que cuando la tuberculosis se localiza en los pulmones molesta el funcionamiento de estos órganos y hace disminuir la absorción posible de aire ¿pero cómo llega la sobrealimentación a suplir esta deficiencia?

No hay que olvidar la conclusión a la cual llegan Vassiliey y Tchjevski (1) después de numerosas experiencias.

«Así pues, los pulmones poseen, junto con la de los cambios gaseosos e hídricos, una función todavía desconocida de los fisiologistas; es la regularización del estado electroquímico de los elementos coloideos celulares de la sangre efectuada por la inspiración de iones de tal o cual signo. Hemos llamado esta función electro cambio.»

Así pues los pulmones se presentan como los órganos que producen el electro cambio orgánico y el desarreglo de esta función en caso de tuberculosis pulmonar es incontestable; recordamos además a este respecto que, hace algún tiempo, después de numerosos exámenes de sangre de enfermos padeciendo de tuberculosis pulmonar el Dr. Tchejevski declaró que es indudable el hecho «que se hace más lenta la reacción de la precipitación de las hematies bajo la influencia de la aeronoterapia.

De eso resulta que en caso de tuberculosis pulmonar, el organismo deja de absorber la cantidad de iones necesaria y que además deja de mantener el desequilibrio negativo igualmente necesario.

La cosa es grave puesto que si este estado continúa, sobrevendrá la muerte, mientras que si por cierto medio se llega a reemplazar por otra esta admisión pulmonar de iones se podrá dar al paciente tiempo para reaccionar contra la enfermedad.

En mis trabajos «*Relations normales et pathologiques des courants sans fils et par fils*»(2) y «*Cargas, corrientes sin hilos y con hilos en el organismo*»(3) he expuesto las relaciones que existen entre las cargas y las corrientes sin hilos y entre éstas y las corrientes por hilos e indicado también que la fuerza era captada en gran parte por el organismo bajo forma de cargas ligadas a partículas materiales.

De lo que preceda resulta que un organismo padeciendo de tuberculosis pulmonar ve reducirse en gran parte la admisión de iones hecha por los pulmones pero que si por otra parte, las cargas son absorbidas con los alimentos, la sobrealimentación puede remediar en gran parte esta insuficiencia pulmonar.

Pero como es bajo forma de iones que la fuerza eléctrica es admitida por los pulmones y que, en consecuencia, es entonces dividida en electricidad positiva y negativa, esta admisión pulmonar puede ser regularizada de modo a admitir más un signo que el otro y lo es efec-

(1) *Revue de Pathologie comparée.* Julio, 1934.
(2) «*Revue de Pathologie Comparée*» Paris Feorier, 1435.
(3) *La Semana Médica,* N° 13, 1935.

tivamente admitiendo más abundantemente los iones negativos que los positivos manteniendo en el organismo la superioridad de los primeros que es necesaria.

Pero en caso de tuberculosis pulmonar parece que los pulmones se hayan vuelto impotentes a asegurar la superioridad del signo negativo ¿Por qué? esto queda por establecer; posiblemente esta selección necesita un trabajo que no puede ya cumplir el organismo enfermo, pero de todos modos el hecho es y se sabe cuanto se mejora la función de los pulmones en el enfermo que se trasporta a una altitud en la cual predominen los iones positivos.

Pero si la función de este órgano se mejora, la admisión hecha en gran cantidad de iones positivos no asegura al organismo el desequilibrio necesario en el sentido negativo y es por eso que si a veces la cura de las alturas da en apariencia buenos resultados momentáneos es muy raro que los enfermos, que hacen esta cura, mejoren definitivamente.

La cura por la sobrealimentación da más frecuentemente buenos resultados y el número de estos aumentará al darse clara visión de lo que se debe obtener de ella.

En un libro que hace algunos años el Dr. Le Gendre consagró a Charles Bouchard[1] «dice: «Los resultados favorables, a veces muy rápidos, en cuanto a recuperación de peso obtenidos en tuberculosos ya muy deprimidos, animaron a numerosos médicos a adoptar esta suralimentación con la cual los directores de Sanatorios alemanes habían obtenido éxito.

«Pero una más larga experiencia clínica hizo ver después de algunos años el error de los adeptos del «gavage» y de la suralimentación que obtenían solo mejoras momentáneas y comprometían a veces el porvenir del enfermo perturbando el aparato digestivo».

Estos malos resultados provienen de la mala comprensión de la suralimentación; no se trata de hacer absorber al enfermo una cantidad enorme de alimentos pero sí ce hacerle ingerir alimentos que aseguran el desequilibrio necesario en el sentido negativo.

Hay que reglamentar la alimentación de tal modo que introduzca en el cuerpo cargas más abundantes de modo a reemplazar los iones que los pulmones no admiten más en cantidad suficiente, pero hay que introducir en el organismo cargas en las cuales predomina ya el

(1) *P. Le Gendre.* «Charles Bouchard *con oeuvre et son temps*» Masson ed. Paris, 1924.

signo negativo siendo dado que los pulmones no pueden ya asegurar la predominencia necesaria de este signo y es por eso que tan buenos resultados han sido obtenidos empleando como alimento la carne cruda de caballo, animal de una gran actividad pulmonar y en el cual hay tan franco exceso de negatividad en las cargas.

Pero de todo lo que antecede resulta que la denominada sobrealimentación debe ser más que todo una alimentación elegida de modo a asegurar la predominencia del signo negativo que no puede más mantenerse por medio de los pulmones.

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Por C. C. D.

Fascículos, editados por Hermann & Cía., de la colección « Actualités Scientifiques et Industrielles ». $16\frac{1}{2} \times 25\frac{1}{2}$. Número de pág. y precios variables. París.

Nº 219. — Bouligand (G.), Giraud (G.) y Delens (P.), *Le Problème de Le Dérivée Oblique en Théorie du potentiel.* 80 páginas, 1935. Precio: 18 francos.

Constituye el fascículo VI de la serie parcial « Exposés de Géométrie », dirigida por E. Cartan.

Los autores son profesores de las Facultades de Ciencias: de Poitiers el primero, de Clermond Ferrand el segundo.

El tercero lo es, en carácter de agregado, en el Liceo del Hâvre; es doctor en ciencias matemáticas.

Bouligand ha tratado la primera parte a título de Introducción General, y expone en ella, después del enunciado del problema de la derivada oblícua, consideraciones sobre los problemas lineales de la teoría del potencial, la función de Neumann, los aspectos singulares de aquel problema, etc.

Jorge Giraud, en la segunda parte, da una solución rigurosa de ese problema, satisfaciendo a condiciones muy generales para el caso llamado *regular;* abarca cuatro capítulos. El primero se ocupa de la definición y primeras propiedades de las integrales principales; el 2º del problema preparatorio; el 3º de las ecuaciones con integrales principales; el 4º de las aplicaciones a las funciones armónicas. Además, al final, trae un índice bibliográfico.

Por último, el profesor Pablo Delens expone la teoría geométrica de las congruencias de curvas en sus relaciones con el problema homogéneo de la derivada oblícua. Trae también un Indice bibliográfico.

INTERPRETACION DE LA NINFOSIS (1)

Por P. MAGNE DE LA CROIX

RÉSUMÉ

Dans le présent travail l'auteur rappelle que les relations, dans l'être, des ions, des charges, des courants sans fils et des courants par fils, depuis qu'il a pu partiellement les démontrer, sont venues apporter l'explication d'une quantité de faits qui étaient restés inexpliqués jusqu'à ses travaux, lesquels sont venus donner, entre autres explications, celle du pourquoi certains vertébrés naissent en possession de leurs allures définitives et d'autres non.

Ceci rappelé, il indique que pour comprendre le phénomène si simple de la chrysalide il faut se convainere que les retours d'évolution peuvent exister dans un être au cours de sa vie. Ce qui les limite énormément et les réduit à une limite infime chez les vertébrés supérieurs c'est la spécialisation de plus en plus grande de leurs tissus; mais ces retours, ces répétitions d'évolution sont loin d'être aussi impossibles aux vertébrés appartenant au bas de l'échelle qu'à ceux arrivés à son sommet.

Si chez les vertébrés l'évolution s'est faite de plus en plus rapide dans le sens de la spécialisation, il n'en a pas été de même chez les arthropodes en lesquels elle s'est effectuée dans le sens de la polyvalence et ceci a tel point que l'on voit, chez eux, des cellules adipeuses se mettre a remplir le rôle de reins et devenir de nouveau, par la suite, de simples cellules adipeuses.

Quand dans l'être il y a conversion d'une grande quantité de charges en courants sans fils, il en résulte toujours un grand dépôt d'urates, les arthropodes peuvent les évacuer plus ou moins facilement suivant le degré d'évolution auquel ils sont arrivés relativement à la polyvalence des cellules adipeuses; mais les vertébrés, à cause de la spécification acquise des tissus, ne peuvent les éliminer qu'en quantité très limitée et déterminée, il peut y avoir quelques accumulations locales, comme en la goutte, mais une accumulation trop grande ou se généralisant serait rapidement fatale et, en conséquence, ne compte pas pour l'hérédité.

(1) Traído por la presente investigación al terreno de la entomología me ví a menudo, para llevarla a buen fin, obligado a acudir en procura de datos referentes a la anatomía de los insectos al Dr. M. E. Jörg, que es ciertamente la persona más competente al respecto que hay en el país; y, por lo que toca a la entomología general, a los doctores F. Lahille, E. del Ponte y J. Liebermann, así como al señor ingeniero agrónomo C. A. Lizer y Trelles y al señor R. N. Orfila. Que todos estos amigos reciban aquí mis sinceros agradecimientos.

Mais ce qui s'est produit souvent chez les vertébrés c'est une régularisation à l'état foetal des rapports des courants sans fils aves ceux par fils, régularisation qui avait été impossible pour les parents chez qui, le courant augmenté dans le système sans fils, avait été employé par le système par fils.

Chez le foetus, avant l'apparition du système nerveux, cette augmentation de la puissance avait très bien pu être employée et l'accétération acquise fut transmise au système nerveux quand il apparut, d'où il résulte que les animaux en ce cas naissent avec l'encephale adulte et en possession de leurs allures définitives.

Chez ceux des arthropodes qui n'out pas très évolué dans le sens de la polyvalence des tissus il peut arriver un report d'une partie assez grande de l'évolution à l'état embryonnaire, tel est le cas des sauterelles, mais le report produit en ce cas résulte, non d'un désaccord de puissance entre les courants sans fils et ceux par fils, sinon d'un désaccord de puissance entre les charges et les courants sans fils qui a lieu parce que ces insectes n'avaient pas acquis encore assez puissante la polyvalence de leurs cellules adipeuses pour leur permettre l'évacuation des urates produits en ce cas.

Mais pour ceux des insectes qui ont bien poursuivi leur évolution en ce sens et out acquis une grande polyvalence des tissus avant d'entrer plus avant dans l'évolution générale, les cellules adipeuses se convertissant facilement en organes capables d'éliminer les urates, la conversion nécessaire se produit sans aucune difficulté. L'élimination des urates s'effectuant, rien ne motive plus le report àl'état embryonnaire de cette phase de l'évolution.

La transformation de ces insectes, d'abord lente et méthodique, s'est activée par la suite et s'est même contractée et résumée, au moment de la grande production d'urates provoquée par la conversion de charges en courants sans fils, l'animal a senti venir le sommeil et s'est préparé à le passer.

Les premiers insectes ont donc dû reporter une partie de leur évolution à l'état embryonnaire chose qui n'a plus été nécessaire à ceux qui ont pu ensuite résumer leur évolution au cours de l'état postembryonnaire, ayant acquis la polyvalence des tissus adipeux.

Il n'y a done pas lieu pour expliquer ces faits de recourrir à la supposition que les insectes à évolution complète descendent de ceux qui avaient reporté une partie de leur évolution à l'état embryonnaire.

I

COMO VINE A OCUPARME DEL PROBLEMA DE LA NINFOSIS

Una breve reseña indicando como fuí llevado a ocuparme de la cuestión de la ninfosis me parece necesaria al principio de este trabajo, para poder exponer después con una brevedad relativa el resultado de mis búsquedas al respecto.

Lo que me llevó al terreno de las investigaciones científicas, es el interés que como pintor animalista tenía en representar movimientos

justos. Si a veces la fotografía puede ser útil para determinar exactamente el tiempo que corre entre una fase de movimiento y otra, así como para probar al público lo que se ha visto, no es indispensable para el estudio y aún diré que es completamente insuficiente para llevar a fondo un estudio serio que solo puede ser hecho por medio de los ojos, pues solo el que por medio de ellos mira constantemente animales en movimiento, es el que puede llegar a comprender la locomoción; lo cierto es que por este procedimiento llegué primero a poder establecer la escala evolutiva de la locomoción en los vertebrados y a establecer algunos puntos de determinación en la de los invertebrados.

Al principio pasé 35 años anotando andares de animales; sus variantes eran tan grandes y tan desconcertadoras que durante todo este tiempo no pude darme cuenta de lo que había podido ser la evolución de los andares; en esa época una observación hecha sobre los saltos y los galopes me permitió reconstituir la evolución de estos últimos y después, la filogenia general de los andares en los vertebrados.

Pero establecida ésta, y a pesar de darme cuenta de que no podía ser otra, quedé completamente extrañado al constatar que en ella no se podía seguir una evolución mecánica regular, pues se observaba, en esta evolución, adelantos mecánicos seguidos de retrocesos.

Mi amigo el conocido psicólogo doctor Ch. Blondel puesto al corriente de las dificultades con las cuales tropezaba, me aconsejó tratar de encontrar la explicación de los hechos constatados en la evolución del sistema nervioso. Esta indicación al principio me desconcertó, no sabía cómo empezar semejante búsqueda, cuando me vino la idea de comprobar la repetición de las impresiones cinestésicas y entonces comprobé que, tanto en la rama principal de la evolución como en las ramas divergentes, esta repetición se producía siempre de más en más veloz, y para una fracción de movimiento de más en más reducida.

Encaminado así, no tardé en darme cuenta de la existencia de los sistemas de corrientes sin hilos, de los iones, de las cargas y de la relación que éstos tenían con el sistema nervioso. Este encerraba la explicación de varios puntos oscuros hasta este día, y entre ellos el por qué ciertos vertebrados nacen en posesión de sus andares definitivos y otros no; esto lo expuse en mi trabajo « El shock y su papel en la herencia ».

Mis trabajos sobre las corrientes sin hilos y las relaciones que exis-

ten entre estas corrientes y las con hilos atrajeron la atención en el extranjero(1) y, en París, el conocido Dr. FOVEAU DE COURMELLES publicó en la « Revue de Pathologie Comparée » (Mayo 1935) un largo artículo titulado « A propós des courants sans fils et par fils de M. MAGNE DE LA CROIX » que termina así: « El señor MAGNE DE LA CROIX abre camino tan interesante que me ha parecido necesario, si no de precisarlo por lo menos de hacer ver las posibilidades de estudios y de los desarrollos científicos los más útiles que son su consecuencia ».

Pero el estudio de las relaciones entre iones, cargas, corrientes sin hilos y con hilos me había llevado a investigar al mismo tiempo problemas patológicos y biológicos; en 1933 había publicado en el « Boletín del Instituto de Medicina Experimental » que dirige tan hábilmente el Dr. A. ROFFO un trabajo titulado « Indications pathologiques resultant d'investigations sur la locomotion »; este trabajo, que me había llevado a una indicación relativa al cáncer, me llevó también a una determinación precisa de lo que es el reumatismo; expuse estos resultados a la « Société de Pathologie Comparée » (1º de Diciembre 1935) y en la misma sociedad, algunos meses después (Abril 1936) el Dr. LEVAGGI publicó las curaciones que había obtenido, en pura sangre padeciendo, de este mal por la aplicación de un tratamiento que tiene solo su explicación en mi definición de este estado patológico; por otra parte el conocido Dr. E. MOUCHET, profesor en la Facultad de Medicina de Buenos Aires, demostró en un curso que hizo en esta Facultad que mi teoría era la primera que traía luz sobre lo que era el reumatismo. En efecto, en 1934, en la conferencia internacional de médicos, ocupándose de este estado patológico en Aix-les-Bains, había sido declarado que no se sabía lo que era esta enfermedad.

Debe parecer a los que me leen que estamos muy lejos de la ninfosis, pero no lo estamos tanto como lo parece y esta breve reseña era necesaria para comprender lo que va a seguir; en efecto, al hacer mis investigaciones relativas a la determinación del reumatismo, después de comprobar que el reumatismo provenía de una acumulación de cargas que no podían convertirse en corrientes sin hilos o con hilos, pude darme cuenta que una acumulación de uratos, existía en ciertos casos de reumatismo y que una más abundante existía en los

(1) Estos trabajos han sido publicados aquí y también en Francia en la « Revue de pathologie comparée », gracias al interés que demostró para ellos el distinguido histólogo Prof. GABRIEL PETIT, miembro de la « Académie de Médecine » de Francia.

casos de gota; comprobé después que esta acumulación en lugar de ser la causa del mal, como se creía generalmente, era su consecuencia y que parecía provenir de la conversión de una parte de las cargas en corrientes sin hilos en consecuencia de la acumulación de las primeras.

Los órganos de eliminación de los vertebrados siendo completamente especializados, resulta de eso una acumulación fatal de uratos cuando éstos se producen en cantidad exagerada en ciertas partes del organismo.

Si estudiaba cuestiones patológicas no había por eso abandonado mis investigaciones biológicas y al mismo tiempo que me ocupaba del reumatismo trataba de resolver el problema de la ninfosis; este hecho me fué favorable, pues al mismo tiempo que comprobaba la aglomeración peligrosa de uratos en los vertebrados, en caso de reumatismo, pude darme cuenta que los insectos al pasar por el estado de ninfosis producían una grande cantidad de uratos que parecían provenir también de la conversión de cargas en corrientes sin hilos; pero esta producción era sin inconvenientes para ellos, pues siendo dada la gran cantidad de uratos a evacuar las células adiposas venían a ayudar las glándulas de Malpighi haciendo función de riñones en miniatura para volver después al estado de sencilla célula adiposa cuando la eliminación de uratos en exceso dejaba de ser necesaria.

Después llegué a la convicción que mientras los vertebrados perfeccionan sus tejidos en el sentido de la especialización, los articulados lo hacían en el sentido de la polivalencia y que eso les da posibilidades que no existen para los vertebrados, que por otra parte obtienen una más grande precisión en sus funciones. Eso era interesante a señalar antes de abordar el problema de la ninfosis, al cual hasta ahora no se había dado ninguna explicación; como además antes de mis investigaciones sobre el « shock » ninguna explicación había podido ser dada al hecho que ciertos vertebrados nacen en posesión de sus andares definitivos mientras que otros nacen sin caminar, y, cuando principian a hacerlo, toman su evolución locomotriz muy atrás de lo que será cuando llegarán a emplear sus andares definitivos.

II

LO QUE SE HA DICHO SOBRE LA CUESTIÓN DE LA NINFOSIS ANTES DEL PRESENTE TRABAJO

Desde largo tiempo atrás la cuestión de la ninfosis despierta la curiosidad de la humanidad y eso indujo a investigar todo lo que fué posible relativamente a este fenómeno; pero si, en los trabajos nu-

merosos que se hicieron a este respecto algunos pretendieron explicar el fenómeno, en realidad ninguno lo hizo y, como lo dijo muy bien HENNEGUY en su libro « Les insectes », estas pretendidas explicaciones son sencillas constataciones de lo que pasa pero que no explican nada y el autor de dicho libro concluye reconociendo que el problema queda por resolver.

Uno de los más antiguos trabajos sobre este tema es el de ARISTÓTELES y la definición que dió de estas metamorfosis fué tomada de nuevo dos mil años después por W. HARVEY, célebre por su descubrimiento de la circulación de la sangre.

« HARVEY, dice CARPINTER, suponía que el huevo de una mariposa no contiene la suficiente cantidad de alimento almacenado para completar la formación de un organismo tan complicado como el insecto adulto, pudiendo solo producir la imperfecta larva. Explicábase así la voracidad de la larva para proveerse de gran cantidad de substancia nutritiva, después de lo cual se creía que al convertirse en ninfa volvía al estado de huevo, pero mucho mayor que el primero, del cual pudiera salir el insecto alado ».

Huevos y ninfas tienen evidentemente ciertos puntos de coincidencia, pero hay una profunda diferencia; es que uno se coloca al principio de la vida del ser y el otro en su curso, además esta similitud no explica en nada porqué se produce el fenómeno.

Mucho tiempo pasó en el cual fueron pocos los que se interesaron en la cuestión, pero al fin del siglo pasado se multiplicó el número de los investigadores que pretendieron explicarla.

Uno de los primeros trabajos que fueron publicados en esta época fué el de LUBOCH (1873) ; en realidad es una sencilla constatación de los hechos que concluye por la declaración que la inmovilidad de la ninfa es el resultado de la rapidez de las transformaciones que se efectúan en ella.

En 1894 MIALL ha querido comparar las metamorfosis del insecto a las de los anfibios anuros, pero PEREZ le sostuvo que no había ninguna relación entre los dos fenómenos; de todos modos es muy lejana y habría, por lo menos, para poder presentar eso como un resultado, que explicar el porqué de esa otra serie de evolución, lo que no ha hecho MIALL.

En 1897 BOAS señaló las diferencias entre la larva y el insecto completo; pero si este autor da las diferencias, nada en su trabajo indica en realidad el porqué de estas transformaciones; en 1898 PACKARD y con él FRITZ MULLER, llegaron a una conclusión justa, se-

gún mi opinión, a creer que la metamorfosis completa es un proceso adquirido y resumido después, pero no explican nada relativamente al porqué de este resumen.

Luego Weissmann y Viallanes han emitido la opinión que el fenómeno era la consecuencia de la disgregación de las células pero sin explicar el porqué; Metchnikoff, Kowalsky y Van Reiss edificaron una teoría de la fagocitosis, sin ninguna indicación de lo que limitaba su acción; Pérez expuso una teoría de una crisis genital y en la degeneración Korotneff, de Bruyne, Rengel, Karawaiew, Terre, Anglas, Bresle, Kellogg y Bataillon han creído ver la explicación del fenómeno, pero en realidad eso no explica nada. Bataillon et Terre han emitido en 1900 la teoría de la asfixia; las perturbaciones puestas de relieve por estos autores prueban que dejan de funcionar bien el sistema respiratorio y el nutritivo en la ninfa, pero de ningún modo que sean la causa de la transformación; a este respecto Metchnikoff y Pérez han dicho con razón: « Si había un malestar causado en las células por las condiciones de asfixia, este mal debería ser general; pero no es así, ciertos tejidos (tubos de Malpighi, glándulas salivares) desaparecen bruscamente histolisados; hay otros que sufren una transformación progresiva ».

Pero en el siglo actual si se continuó investigando sobre la ninfosis, pocos autores trataron de explicar el fenómeno; Carpinter en su interesante libro « La vida de los insectos », después de exponer con cierta simpatía la hipótesis de Deegener concluye sin embargo confesando la ignorancia respecto a la causa del fenómeno que nos ocupa aquí.

« En una discusión reciente sobre las transformaciones de los insectos, dice este autor, P. Deegener (1909), ha sostenido que la larva debe ser estimada como el grado más modificado del desarrollo del insecto; porque mientras todos los órganos del adulto están representados en la larva, aunque sea como gérmenes imaginables; hay por lo común, en la larva órganos especiales adaptativos, que no se hallan en el imago; por ejemplo, las antepatas de las orugas o las aguallas de la piel de las larvas de los mosquitos ».

Pero a pesar de esta simpatía concluye más lejos:

« Nuestro estudio de la historia de la vida de los insectos... nos pone frente a frente del más instructivo, aunque humillante, hecho de que « hay muchas cosas que ignoramos ».

Es así que, hace poco, Carpinter expresaba su opinión al respecto. Ahora creo haber encontrado la explicación de estos hechos que re-

sulta de mis búsquedas pero, antes de enunciarla, creo bueno recordar que los insectos se dividen en cuatro grandes grupos establecidos según el modo en el cual se presentan sus metamorfosis (1), estos grupos son:

1º Ametabolos.
2º Hemimetabolos.
3º Metabolos
4º Hipermetabolos.

Si comparamos entre sí, de una parte los animales de los 1º y 2º grupos y de otra parte los de los 3º y 4º grupos, constatamos entre ellos una gran diferencia; los de la primera agrupación han transferido una gran parte de su evolución al estado embrionario, mientras los de la segunda sufren sus metamorfosis al estado postembrionario.

Los jóvenes insectos de la primera agrupación tienen, desde su nacimiento, o la misma forma o casi la misma que el insecto perfecto, la principal diferencia siendo, en el segundo caso, la inexistencia de las alas al principio de la vida, las cuales se ven aparecer en las últimas mudas; estos animales han transferido todo el principio de su evolución al estado embrionario.

Los insectos de los dos últimos grupos que encaramos, que constituyen la última categoría, nacen al estado de larva; en este estado difieren completamente de lo que serán al estado de imago, y para evolucionar de su primera forma hasta la última, pasan, por el estado de ninfa.

Pues bien, si encaramos estas dos grandes categorías de insectos, constataremos que la primera es la más antigua y la segunda la más reciente; cuando ya existían insectos de la primera categoría, los de la segunda eran solo representados por larvas que hicieron su evolución después y pudieron resumirla más tarde.

En el capítulo que sigue expondré porqué no creo que los de la segunda categoría descienden de los de la primera.

(1) Otro modo de dividir los insectos a este respecto consiste en considerar de una parte los ametabolos y de otro los metabolos que se dividen en metabolos incompletos, holometabolos e hipermetabolos, pero como en esta última clasificación el segundo grupo abarca animales habiendo reportado una parte de su evolución al estado fetal y otros no, nos conviene más adoptar para el presente trabajo la clasificación que damos.

III

COMO SE PUEDE LLEGAR A DEFINIR LO QUE ES LA NINFOSIS

El libro de HENNEGUY sobre los insectos, documentado con tan grande precisión termina así: « Ninguna de las hipótesis emitidas hasta ahora para explicar el origen de la metamorfosis no me parece resolver el problema del cual la solución, como la de todas las cuestiones relativas a la filogenia, no podrá ser dada sino que por un estudio profundizado de los documentos dados por la paleontología.

« Estos documentos faltan absolutamente en lo que se refiere a los estados larvales y es muy posible que estos estudios tan interesantes de la embriología general queden por mucho tiempo o por siempre sin ser fijados. Pero podemos consolarnos de nuestra importancia para determinar ciertas cuestiones dándonos cuenta que quedan muchas a resolver en el vasto campo de la anatomía, de la histología, de la embriología y de la fisiología de los insectos ».

Cierto es que la paleontología en la actualidad, y posiblemente para siempre, es incapaz de darnos los documentos necesarios para solucionar el problema; pero hay otro camino que puede permitir llegar a este resultado y es el estudio de las relaciones, en el organismo, de los iones, cargas, corrientes sin hilos y corrientes con hilos; este estudio ya me permitió resolver algunos otros problemas biológicos que quedaron en apariencia insolubles hasta mis trabajos al respecto.

Es bueno recordar brevemente estas relaciones: Los trabajos de VASSILIEY y TCHIJEVKY sobre la admisión de iones en el organismo (1) y los míos sobre las cargas y las corrientes sin hilos han establecido que en el ser vivo no existen sólo, como se tenía tendencia a concebirlo, corrientes con hilos (nervios) sino también iones, cargas y corrientes sin hilos.

Anteriormente, antes de haber definido completamente la relación entre sí de los diferentes sistemas de energía, había expuesto en un

(1) Los trabajos de VASSILIEY y TCHIJEVKY al hacer ver de modo preciso la manera por la cual los pulmones captan bajo forma de iones, la electricidad del aire, desequilibrándola en el sentido negativo, ponen en evidencia que se debe modificar completamente el sentido dado a la expresión influjo vital.

trabajo sobre el « shock » cómo las relaciones de las corrientes sin hilos y de las con hilos venían a explicar ciertos hechos en biología y entre ellos los que se refieren al estado del encéfalo y al de los andares en el momento del nacimiento.

Creo que es bueno resumir aquí los efectos que resultan para un vertebrado de un desacuerdo o « shock » en + entre las corrientes sin hilos y las con hilos (en favor de aquéllos); veamos primero el caso de un « shock » en + liviano, en tal caso los descendientes de los que han recibido el « shock » nacen con el encéfalo embrionario y sin poder caminar, pero, cuando toman sus andares, principian a dar los que se avecinan al punto donde se produjo el « shock » en su evolución locomotriz; pero si el « shock » en + ha sido violento el animal nace con el encéfalo de tipo adulto y en posesión de sus andares definitivos.

La fuerza de la corriente sin hilos no ha podido ser empleada por los adultos que han sufrido este violento « shock » en +, pero los productos, al estado fetal, han podido emplearla antes de la aparición del sistema nervioso y la velocidad de desarrollo adquirida antes de su aparición continúa cuando éste principió a desarrollarse.

Los fenómenos que acabamos de constatar en los vertebrados están motivados por un desacuerdo entre las corrientes sin hilos y con hilos que no pudiendo equilibrarse al estado de vida consiguen solo su regularización al estado fetal, en los descendientes de los animales que han sufrido un violeto « shock » en +.

Los fenómenos que vamos a comprobar en los artrópodos son motivados no por un desacuerdo entre la corriente sin hilos y la con hilos, pues el último de estos dos sistemas no está tan desarrollado como para motivar semejante desacuerdo, pero sí por una discordancia entre el poder de las cargas y la aceptación de corrientes por el sistema sin hilos.

Cuando hay transferencia de la fuerza, proveniente de las cargas a las corrientes sin hilos, se comprueba siempre la presencia de uratos cuya evacuación es solo posible en los seres que han conseguido la polivalencia de sus células adiposas.

Los insectos que no han conseguido dicha polivalencia están obligados a transferir al estado embrionario toda la parte primitiva de su evolución incluyendo el momento en que se debe producir la gran transferencia de fuerza entre cargas y el sistema de corriente sin hilos.

Una transferencia semejante, aunque relativamente reducida, del

momento en el que existe cierta producción exagerada de los uratos, ocasiona siempre trastornos en los animales que no han adquirido por completo la polivalencia de sus tejidos adiposos y es así que vemos ciertas especies de langostas en las cuales se forma un depósito de uratos tardar un tiempo enorme en evacuarlo y sufrir por este hecho un gran atraso en su maduración sexual; es así que PLOTNIKOV explica estos hechos, a mi parecer con razón.

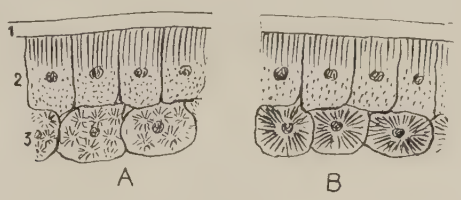


FIG. 1. — Células adiposas habiendo acumulado uratos. — 1, cutícula; 2, epidermis; 3, células a uratos; A, uratos al principio de la condensación; B, uratos muy condensados.

Esta evacuación de uratos, tan difícil si se trata de cantidades pequeñas, e imposible si ellas son mayores, provoca la transferencia de una gran parte de la evolución en los insectos ametabolos y hemimetabolos, al estado fetal; al contrario esta evacuación es muy fácil para los insectos que han conseguido la polivalencia de sus tejidos y particularmente de sus células adiposas, antes de conseguir su completa evolución y, para ellos, una gran conversión de cargas en corriente sin hilos no necesita ser transportada al estado fetal.

Relativamente a las células adiposas que eliminan los uratos he aquí lo que de ellas dice JANET que las ha estudiado particularmente: « Estas células son muy a menudo, por ejemplo en los *Himenópteros,* íntimamente asociadas a un adiposito normal y a veces incluídas en él. Este no parece ser el resultado de una presión mecánica sino más bien el de una asociación funcional.

« PAUL MARCHAL ha estudiado la secreción del ácido úrico en los insectos. Ha constatado en un esfégido del género *Pelopoeus* que las células que eliminan los uratos están diseminadas en el espesor del cuerpo adiposo y que se hallan llenas de glóbulos refringentes de más o menos 15 μ. Esos glóbulos son pequeñas vesículas llenas de urato de amoníaco con una estructura irradiada alrededor de un punto central. En las larvas ya grandes de *Calliphora* el tejido no tiene todavía uratos. Al principio de la ninfosis no pasa lo mismo y contie-

nen urato. Si se aclara una parte del tejido adiposo opaco, disolviendo las materias grasas con éter se constata que quedan en las células adiposas numerosos glóbulos refringentes de 5 a 6 μ. El examen microquímico, después de la instilación de una gota de ácido acético muestra que las células adiposas encierran uratos y que los glóbulos

FIG. 2. — Sistema nervioso de la larva de *Bibio hortalanus*.

refringentes son los elementos en los cuales ellos se depositan.... Los glóbulos refringentes de que se trata son partes diferenciadas de la célula adiposa que contienen el ácido úrico proveniente de la desasimilación en el momento del trabajo tan activo de la ninfosis ».

FIG. 3. — Sistema nervioso de la larva *Phrynée vanessae*, según Künkel d'Herculais.

Por lo que antecede se constata que una gran acumulación de uratos se produce en el momento de la ninfosis y eso equivale a decir que este depósito se produce cuando hay gran transmisión de fuerza entre las cargas y las corrientes sin hilos; lo que ahora es comprensible mientras no lo era antes de hacer esta constatación y es por eso que

personas competentes habiéndose ocupado de este asunto, y entre ellas HENNEGUY, a pesar del desagrado que tienen de recurrir a este extremo, pensaban que el único modo de explicar parcialmente la formación de la crisálida era admitir que los insectos más antiguos, después de haber transferido una parte de su evolución en el estado

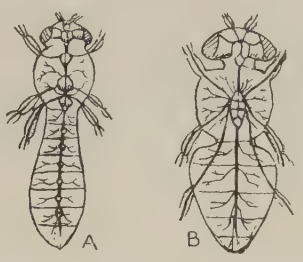


FIG. 4. — Dos sistemas nerviosos diferentes de Diptères. — A, tipo primitivo *Chrinomus plumosis;* B, tipo evolucionado *Sacrophaga carnaria,* según Lang.

embrionario, la habrían de nuevo transferido al estado postembrionario.

Por mi parte nunca me agradó mucho esta explicación y es eso que me impulsó a proseguir estas investigaciones; reconozco que al principio creía que los regresos no existían en el curso del desarrollo o

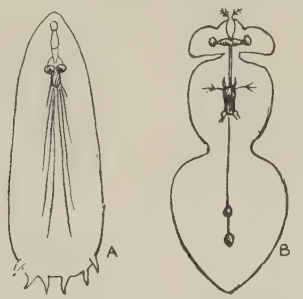


FIG. 5. — Insecto teniendo el sistema nervioso concentrado en la larva y un poco más extendido en el imago (3er. grupo), *Volucella zonaria.* A, larva; B, imago.

que si existían eran muy limitados; esta reserva la hacía porque no podía dejar de comprobar que ciertos vertebrados en su extrema vejez presentaban andares ancestrales que muchas veces, aun siendo jóvenes, no habían poseído.

Pero cuando comencé la presente investigación sobre el estado de ninfosis, pronto fuí obligado a admitir los regresos en los individuos,

pues hay hechos que no dejan ninguna duda a este respecto al que observa los insectos tales como el que se constata en los *mirmeleonidos* que tienen un sistema nervioso más evolucionado en el estado de larva que en su estado adulto.

Fig. 6. — Sistema nervioso de la larva de hormiga-león según Dolfin.

Recordaré a este respecto que la relación del estado del sistema nervioso de la larva con el del adulto hace dividir los insectos en cinco grupos, a saber:

1º El sistema nervioso es primitivo en la larva y queda como tal en el adulto: ej. *Timarcha tenebricosa.*

2º El sistema nervioso no concentrado en la larva lo es en el adulto: ej. *Apis melifica.*

3º El sistema nervioso concentrado en la larva lo es menos en el adulto: ej. *Tabánidos.*

4º El sistema nervioso concentrado en la larva, no lo es en el adulto: ej. *Mirmeleonidos.*

5º El sistema nervioso es concentrado en la larva y en el adulto: ej. *Estridos.*

Evidentemente el 4º grupo no es muy abundante pero es muy interesante, pues él y el 3º grupo evidencia la posibilidad de los regresos en el curso de la vida animal. Pero es importante señalar que si el sistema nervioso es bien francamente resumido en las larvas del 5º y 3º grupo, tal la de la *Volucella zonaria*, no lo es tanto en los insectos del 4º grupo como lo señala H. Weber apoyándose en los trabajos de Dolfin, pero el sistema nervioso de estos insectos, casi resumido en la larva y de nuevo extendido en el imago, hace bien ver las regresiones que pueden producirse en el insecto.

Este hecho y muchos otros me probaron la posibilidad de regresos, a veces muy acentuados, en el curso de la vida de los insectos y pro-

siguiendo mis investigaciones a este respecto llegué a ver la posibilidad de los regresos en el curso de la vida de todos los seres vivos, pero más limitados en los vertebrados y particularmente en los vertebrados superiores, mientras son más abundantes en los artrópodos

Fig 7. — Imago de la hormiga-león.

y particularmente en los artrópodos más evolucionados en el sentido de la polivalencia de los tejidos.

Como estos hechos son muy importantes hay que precisarlos bien: Si encaramos los cordados, que se dividen en procordados y vertebra-

Fig. 8. — Ninfa de « Bicho canasto » (*Oeceticus kirbyi*) en su capullo.

dos, constatamos que la primera de estas divisiones, a la cual además pertenecieron los antepasados de los vertebrados, encierra animales que presentan regresos flagrantes, se puede ver en los procordados algunos seres que después de presentarse bajo la forma de una larva bastante parecida a un renacuajo sufren una verdadera retrogradación, en ciertos procordados: los tunicados; el doctor L. Lahille ha

estudiado las regresiones evidentes en las larvas de estos animales cuando se fijan, en ese momento pierden, al pasar al estado adulto la cuerda dorsal y su único aparato de visión. Pero en los vertebrados se produce la especialización de los tejidos y son ya imposibles, en los vertebrados aun inferiores, regresos semejantes.

Esta diferencia aumenta mucho con la evolución de los seres, pues los vertebrados evolucionan en el sentido de la especialización de sus tejidos y de sus órganos, mientras los artrópodos (y entre ellos los insectos) evolucionan en el sentido de la polivalencia de los tejidos y esta polivalencia ya no difusa sino bien precisa para ciertas funciones y aumentada por la evolución, da a numerosas células adiposas el poder de evacuar los uratos producidos a consecuencia de la conversión de la fuerza de las cargas en corrientes sin hilos.

FIG. 9. — Capullos de gusano de seda (*Bombyx mori*).

Esta evolución en la polivalencia celular hace posible la evacuación de los uratos, lo que no sucedía antes. En los de los artrópodos, en los cuales no existe la polivalencia de las células adiposas, o al menos en grado suficiente, es solo en el estado embrionario que puede producirse el período de conversión de las fuerzas de las cargas en corrientes sin hilos. Los de los insectos que llegaron a hacer esta conversión después de haber adquirido la polivalencia de las células adiposas pudieron conservarla al estado postembrionario, esta evolución al concentrarse después produjo la ninfa; la perturbación y el cansancio que produce en el ser el acercamiento de este momento, provoca el sueño para el cual el animal se prepara lo mejor posible haciendo por lo general un capullo.

No hay pues que recurrir a la inverosímil suposición de que algunos de los antiguos insectos después de haber transferido la primera parte de su evolución al estado embrionario la hayan después sacado de allá para transferirla de nuevo al período postembrionario.

Lo que me parece es que los insectos primitivos (ametabolos y hemimetabolos) no pudiendo evacuar los abundantes uratos que produce una conversión a gran escala de la fuerza de las cargas en corrientes sin hilos, tuvieron que transferir este período al estado embrionario (1) como lo hicieron algunos vertebrados para la conversión de corrientes sin hilos en corrientes con hilos.

En cuanto a lo que se refiere a los metabolos e hipermetabolos, que solamente eran larvas cuando los otros habían ya llegado a su evolución final, habiendo ya adquirido la polivalencia especial de ciertos tejidos que permiten la evacuación de los uratos cuando se produjo para ellos la necesidad de convertir la fuerza de las cargas en corrientes sin hilos, no tuvieron ninguna necesidad de pasar este período de su vida al estado embrionario.

La falta de continuidad regularmente progresiva que resulta de la brusca transformación de las cargas en corrientes sin hilos, así como el reemplazo momentáneo de ciertos órganos por otros, son probablemente el motivo por el cual, en ciertos casos, al concentrarse después de la evolución para producir la ninfosis, el desarrollo de ciertos órganos no se haya terminado completamente.

IV

CONCLUSIÓN

En el ser existen iones, cargas, corrientes sin hilos y corrientes con hilos; las relaciones que se constatan entre ellos han traído luz sobre una cantidad de hechos que habían quedado sin explicar hasta mis trabajos al respecto.

Además de comprender el papel importante que desempeñan estas

(1) En los seres inferiores las células tienen aptitudes múltiples, al evolucionar en los vertebrados se especializan en una función mientras las otras retroceden hasta perderse; en los artrópodos las células se especializan en una o varias funciones y las otras aptitudes retroceden pero no tan francamente y una o varias de ellas pueden especializarse después dando a los tejidos la polivalencia.

relaciones en el fenómeno de la ninfosis hay, para llegar a penetrarlo bien, que darse cuenta de las regresiones de la evolución que pueden presentarse en el curso de la vida de un ser; lo que reduce estas regresiones a casi nada en el curso de la vida de los vertebrados superiores es la especialización de más en más grande de sus tejidos; pero estas vueltas de evolución no son tan imposible en los vertebrados inferiores.

Pero si en los vertebrados la evolución se ha hecho de más en más veloz en el sentido de la especialización lo mismo pasó en los articulados, entre los cuales la evolución llegó a dar la polivalencia de los tejidos y ésto a tal punto que en ellos se ven células adiposas ponerse a desempeñar el papel de riñón y volverse después a su papel de célula adiposa.

Cuando en el ser hay conversión de una gran cantidad de cargas en corriente sin hilos se constata siempre un gran depósito de uratos, los articulados pueden evacuarlos, más o menos fácilmente según el grado de evolución al cual han llegado; pero los vertebrados, y más que todo los más evolucionados, a causa de la especialización adquirida de los tejidos pueden sólo eliminarlos en cantidad muy reducida, algunas acumulaciones locales pueden producirse, como en la gota, pero una acumulación grande y generalizada sería rápidamente fatal y en consecuencia no puede tener influencia en la herencia. Pero lo que puede muy bien producirse en los vertebrados es una regularización, al estado fetal, de la relación de las corrientes sin hilos con las con hilos, aún después de no haber podido operarse en los parientes, cuando en estos seres el primero de estos dos sistemas ha adquirido un exceso de potencial.

Esta regularización así efectuada da, como es fácil constatarlo, seres naciendo con el encéfalo adulto y en posesión de sus andares definitivos.

Para los de los insectos que no son muy evolucionados en el sentido de la polivalencia de los tejidos puede haber transporte de una parte bastante grande de la evolución al estado embrionario como ocurre para las langostas; este transporte parece haber sido motivado por un desacuerdo o « shock » en + de las cargas con las corrientes sin hilos, « shock » que se había producido porque estos insectos no habían evolucionado bien todavía la polivalencia de sus tejidos.

Pero para los insectos que han seguido su evolución en esta dirección y han adquirido gran polivalencia, antes de adelantar su evolución general, las células adiposas se convierten fácilmente en órganos

capaces de eliminar los uratos; la conversión necesaria, produciéndose con facilidad si esta eliminación es posible, no hay más ninguna razón que motive el pasaje de este período al estado embrionario.

Las transformaciones de estos insectos, al principio lentas y metódicas, se han activado después y aún han llegado a concentrarse al momento en el cual la gran conversión de la fuerzas de las cargas en corrientes sin hilos se ha hecho posible, gracias a la conversión de los uratos.

Los primeros insectos han tenido, pues, que transferir una gran parte de su evolución al estado embrionario, cosa que no ha sido más necesaria a los que han podido resumir después, en el curso de su vida, su evolución gracias a la polivalencia adquirida de sus tejidos.

No hay pues ninguna necesidad para explicar estos hechos de recurrir a la suposición que los insectos de evolución completa descienden de los que habían transferido una parte de su evolución al estado fetal.

Para resumir todo en pocas palabras diré que los insectos primitivos habiendo adquirido una gran potencia de cargas no pudieron emplearla durante su vida, siendo incapaces de evacuar la cantidad de uratos que hubiera motivado semejante conversión; pero los productos de estos insectos pudieron hacer esta conversión al principio del estado embrionario, en el cual los tejidos no son todavía especializados en una o varias direcciones y tienen en consecuencia una polivalencia un poco difusa pero general.

Recordaré que ciertos vertebrados reportaron así al estado fetal la conversión de corrientes sin hilos en corrientes con hilos.

Los insectos que necesitaron hacer esta conversión de uratos solo después de haber adquirido la posibilidad de hacerlo por sus células adiposas no tuvieron necesidad de reportar esta parte de su evolución al estado embrionario y ella quedó en el período de vida como la parte subsiguiente de su evolución y es en estado postembrionario que concentraron una parte de esta evolución, en lo que se llama ninfosis.

BIBLIOGRAFIA

ANGLAS (J.), « Quelques caractères essentiels de l'histolyse pendant la métamorphose ». Bul. Soc. entomologique de France, nº 17, 1901.

— « Nouvelles observations sur les métamorphoses internes ». Arch. d'anat. microscop. T. IV, 1902.

BATAILLON (E.), « La théorie des métamorphoses de M. Ch. Perez ». Bul. Soc. entomolog. de France, nº 3, 1900.

— « Le problème des métamorphoses ». C. R. de la Soc. de Biol. Marzo 1900.

BERLESE, « Gli insetti ». Milano 1925.

BOAS (J. E. V.), « Einige Bemerkungen über die Metamorphose der Insecten ». Zool. Jahrbücher Spengel. syst. Bd XII, 1899.

BREYER, « Des espèces monomorphes et de la parthenogenèse des Insectes ». An. Soc. Entom. Belge, T. VI, 1862.

BRUYNE (DE), « Recherches au sujet de l'intervention de la phagocytose dans le développement des invertébrés ». Archives de Biologie, T. XV, 1898.

CARPENTER (G. H.), « La vida de los insectos ». Madrid, s. f.

FOVEAU DE COURMELLES, « A propos des courants sans fils et par fils de M. Magne de la Croix ». Revue de Pathologie comparée, Mayo 1935.

GIRARD (A.), « La métamorphose est-elle une crise de maturité genitale? ». Bul. Soc. Entom. de France, Febrero 1900.

HENNEGUY (L. F.) (notas recogidas por Lecaillon y Poirault), « Les insectes », Paris 1904.

HÜNCKEL D'HERCULAIS (J.), « Mecanisme physiologique de l'eclosion, des mues et de la métamorphose chez les Insectes orthoptères de la famille des Acridides ». C. R. Acad. des Sc., T. CX, Paris 1890.

IMMS, « General Textbook of Entomologie », Londres 1929.

JANET, « L'ontogenèse des insectes », Limoges 1909.

KARAWAIEW (W.), « Ueber anatomie und Metamorphose des Darmkanals der Larve von *Anobium paniceum* ». Biol. Zentralblatt, Bd IX, 1899.

KELLOGG (V. L.), « Phagocytosis in the post-embryonic development of the Diptero ». Am. Nat., Vol. XXXV, 1901.

KOROTNEFF (A.), « Histolyse und Histogenèse des Muskelgewebes bei der Metamorphose der Insecten ». Biol. Zentralblatt, Bd XII, 1892.

KOWALESKY (A.), « Sur les organes excreteurs chez les arthropodes terrestres ». Congrès international de Zool. Moscou 1892.

KULAGIN (N.)., « Notice sur l'origine et les parentés des arthropodes ». Congrès intern. de Zool. Moscou 1892.

LAHILLE (F.), « Les contractions alternantes du coeur chez les tuniciers », Toulouse 1885.

— « Recherches sur les tuniciers des côtes de France », Toulouse 1890.

LEVAGGI (G.), « L'accident rhumatismal chez le pursang à l'entrainement ». Revue de Pathologie comparée, Abril 1936.

LUBBOCK (J.), « De l'origine et des metamorphoses des insectes ». (Trad. Grolous), 1880.

MAGNE DE LA CROIX (P.), « Repetition des impressions cinesthesiques dans l'évolution des allures ». An. de la Soc. Cient. Argentina, T. CXI, 1931.

— « Parallèle entre l'évolution locomotrice des vertebrés et celle des articulés. An. de la Soc. Cient. Arg., T. VCIV, 1932.

— « Indications pathologiques resultant d'investigations sur la locomotion ». Bol. del Inst. de Med. Exp., nº 34, 1933.

— « El shock y su papel en la herencia ». Semana Médica, nº 27, 1934.

— « La locomoción de las lombrices, su relación con la de las larvas de insectos ». An. de la Soc. Cient. Arg., T. CXX, 1935.

— « Cargas, corrientes sin hilos y con hilos en el organismo ». Semana Médica, 28 de Mayo 1935.

— « Ce qu'est le rhumatisme ». Revue de Pathologie comparée, Paris 1935.

Malpighi (M.), « Dissertatio epistolica de Bombyce ». Societali regiae Londoni and scientiam naturalem promovendam institutae dicata, London 1669.

Marchall (P.), « L'acide urique et la fonction renale chez les invertebrés ». Mem. Soc. Zool. Franc. T. 3, 1890.

Marshall (S. A. K.), « Seasonal dimorphism in Butterflies of the genus *Precis* ». An. Mag. Nat. Hist., serie 7, Vol. II, 1898.

Metchnikoff (E.), « Embryologishe studien an Insecten ». Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd XVI, 1866.

Miall (L. C.), « Transformations of Insects ». Nature, 1895.

Meinert, « Contribution a l'étude des Fourmilions », 1889.

Muller (F.), « Larven von Mücken and Haarflüglern ». Antom. Nachr. 1888.

Nelson, « The Embryology of the Honey Bee ». Princeton 1915.

Packard (A. S.), « Text book of Entomology ». London 1898.

Perez (Ch)., « Contribution à l'étude des métamorphoses ». Bul. Sc. de la France et de la Belgique, T. XXXVII, 1902.

Plotnikov (V. J.), « Some observations on the variability of Locusta migratoria in breedings experiments ». Bul. Ent. Res XIV, 1924.

Terre (L.), « Metamorphose et phagocytose ». C. R. Soc. Biol., 1900.

— « Sur l'histolyse du corps adipeux chez l'abeille ». C. R. de la Soc. Biol., 1900.

Vassiliey et Tchijevky, « La theorie de l'électroéchange organique ». Revue de Path. Comp. Julio 1934.

Vaney (C.), « Contribution à l'étude des phenomènes de métamorphose chez les *Diptères* ». C. R. Ac. Sc. T. CXXXI, 1900.

Viallanes (H.), « Recherches sur l'histologie des insectes ». An. de Sc. Nat., 6ª serie, T. XIV, 1882.

Weber (H.), « Lehrbuch der entomologie ». Jena 1933.

Weissmann (A.), « Zur Embryologie der Insecten ». Arch. f. Anat. u. Physiol. 1864.

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

*(Continuación *)*

Se tiene entonces que:

III) *La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas* $S_h(m, n)$ *y* $S_h'(m, n)$ *no idénticos sean transformables el uno en el otro mediante una única sustitución lineal entera unimodular, entre sus incógnitas principales, es que tengan un resolvente propio igual, o un resolvente impropio igual u opuesto.*

Del mismo modo se prueba que:

IV) *La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas sean transformables entre sí mediante una sustitución lineal entera de módulo no nulo* (unimodular o no) *entre sus incógnitas principales es:*

a) Si sus resolventes son impropios, $(h = m)$*, que tengan la misma característica;*

b) Si sus resolventes son propios, que éstos sean iguales.

Pero es fácil ver que dos sistemas que cumplen la precedente condición pueden ser reducidos a sendos sistemas irreducibles respectivamente equivalentes a ellos, tales que en el caso *a*) tengan resolventes iguales u opuestos y en el caso *b*), resolventes iguales. Luego de (III) se deduce que:

V) *Si dos sistemas son transformables entre sí mediante una sustitución lineal entera de módulo no nulo entre sus incógnitas principales, existen sendos sistemas irreducibles equivalentes a los sistemas dados, transformables el uno en el otro por una sustitución lineal entera unimodular entre las mismas incógnitas.*

Dado un sistema $S_h(m, n)$ compatible cuyo grado de indeterminación $n - h$ no sea nulo, todos los sistemas obtenidos de él, eligiendo una matriz principal y prefijando valores a las incógnitas no principales,

(*) Véase pág. 248, Entrega V, Tomo CXXI, Mayo 1936.

los llamaremos sistemas *particulares* deducidos del sistema con respecto a esa matriz principal.

En particular, como en un mismo sistema $S_h\ (m, n)$, pueden existir varias matrices principales, (4), las cuales dependen de las incógnitas que se elijan como tales, cabe naturalmente, la duda, si dos sistemas particulares $S_h'\ (m, n)$ y $S_h''\ (m, n)$ deducidos de un mismo sistema $S_h\ (m, n)$ con respecto a distintas matrices principales en él, puedan ser transformados el uno en el otro mediante una sustitución lineal entera unimodular entre sus incógnitas principales. Las relaciones [8.4] y [8.5], permiten contestar inmediatamente a esta cuestión en forma afirmativa.

Por lo tanto, de (III), resulta también que:

VI) *Los resolventes de un sistema no dependen de cuál sea la matriz principal que se considere en el sistema.*

Ejemplo:

Sean

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 > 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 > 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = X_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = X_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = X_3 \end{cases}$$

un sistema y su adjunto.

Supongamos que su característica h valga dos, es decir que:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$ y que además los tres determinantes de segundo orden

de la matriz $$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$$ [a]

sean distintos de cero.

Se pueden elegir, entonces, en este sistema tres matrices principales distintas que son:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{Vmatrix} \quad ; \quad \begin{Vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{Vmatrix} \quad ; \quad \begin{Vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{Vmatrix} .$$

Los resolventes del sistema con respecto al primer determinante de cada una de estas matrices, pueden escribirse también (4; IV, *b*) en la forma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & X_1 \\ a_2 & b_2 & X_2 \\ a_3 & b_3 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & X_1 \\ a_2 & c_2 & X_2 \\ a_3 & c_3 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \ ; \ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & X_1 \\ b_2 & c_2 & X_2 \\ b_3 & c_3 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Pero siendo $\Delta_3 = 0$ y distinto de cero los tres determinantes de la matriz $[a]$ existen dos números no nulos λ y μ tales que

$$c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1$$
$$c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2$$
$$c_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 .$$

Sustituyendo estas expresiones en las dos últimas, resulta el primero de los tres resolventes. Es decir, son iguales entre sí. En efecto, en el segundo, se tiene

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 & X_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + \mu b_2 & X_2 \\ a_3 & \lambda a_3 + \mu b_3 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 & d_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + \mu b_2 & d_2 \\ a_3 & \lambda a_3 + \mu b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\mu \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & X_1 \\ a_2 & b_2 & X_2 \\ a_3 & b_3 & X_3 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Del mismo modo, en el tercero

$$\begin{vmatrix} b_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 & X_1 \\ b_2 & \lambda a_2 + \mu b_2 & X_2 \\ b_3 & \lambda a_3 + \mu b_3 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda a_1 + \mu b_1 & d_1 \\ b_2 & \lambda a_2 + \mu b_2 & d_2 \\ b_3 & \lambda a_3 + \mu b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & X_1 \\ b_2 & a_2 & X_2 \\ b_3 & a_3 & X_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

que coincide también con el primero cambiando en los dos miembros, la primera columna con la segunda.

Por ejemplo, para el sistema numérico

$$\begin{cases} x + z > 0 \\ y + z > 0 \\ -x - y - 2z + 1 > 0 \end{cases}$$

resulta el único resolvente principal

$$X_3 + X_2 + X_1 = 1.$$

Diremos que dos sistemas normales, no idénticos, de inecuaciones lineales son *iguales*, cuando son transformables, el uno en el otro, mediante una sustitución lineal entera de módulo no nulo.

Convendremos en considerar *iguales* dos sistemas idénticos cualesquiera.

Puesto que todas las sustituciones lineales enteras de módulo no nulo forman grupo y las de módulo unitario forman un subgrupo de ellas, la igualdad así definida, que no depende (III) y (IV) de la matriz principal elegida en cada sistema, goza de todas las propiedades características de esta relación, incluso el caso de sistemas idénticos.

Los teoremas (III) y (7, V) dan un criterio práctico para reconocer la igualdad de dos sistemas, puesto que todo $S_h(m,n)$ tiene un número finito de resolventes.

De la definición resulta:

VII) *Dos sistemas equivalentes, son iguales*, pues reduciéndolos previamente y suprimiendo en las inecuaciones de uno de ellos, los factores en que difieren, (3, VIII), de las del otro, se obtiene el mismo sistema.

Por lo tanto en virtud de esto y de (V), para estudiar las relaciones de igualdad entre dos sistemas, podemos siempre, considerar sustituciones lineales enteras unimodulares.

VIII) *Todos los sistemas particulares deducidos de un mismo sistema con respecto a cualquier matriz principal del mismo, son iguales entre sí.*

Es consecuencia inmediata de (III) y de (VI).

IX) *Existen infinitos sistemas iguales a un sistema* $S_h(m,n)$, *dado*, puesto que (6, I) existen infinitas matrices cuyos determinantes de orden h y de orden $h+1$, son iguales a los de una matriz dada.

X) *Si un sistema es compatible, todos los sistemas iguales a él, también son compatibles*, puesto que tienen resolventes iguales al resolvente principal del sistema dado.

Cuando un sistema $S_h\ (m,\ n)$ no idéntico es compatible, todos los sistemas iguales a él, cualesquiera que sean sus dimensiones, definen (5), en sus respectivos espacios euclídeos, infinitas regiones poliédricas convexas. Diremos, entonces, que todas esas regiones tienen o pertenecen a la misma *figura poliédrica convexa*, o simplemente *figura convexa* y, con frecuencia, diremos también brevemente, *figura*. En caso contrario, es decir, cuando dos sistemas compatibles no son iguales, diremos que las regiones correspondientes tienen figuras *poliédricas convexas distintas*.

En particular, para cada grupo de valores arbitrarios asignados a las incógnitas no principales de $S_h\ (m,\ n)$ si las tiene, y de cualquier otro sistema igual a él, se obtienen infinitas regiones poliédricas convexas *afines* entre sí. Corresponden a sistemas particulares deducidos del sistema dado.

En lo sucesivo, cuando hablemos de la *figura* correspondiente a un sistema normal compatible, $S_h(m,n)$, nos referiremos a cualquiera de las infinitas regiones convexas hiperespaciales, definidas por el sistema y por los sistemas iguales a él.

La figura correspondiente a un S_h (m, n), está pues, caracterizada por uno cualquiera de sus *resolventes principales* los cuales, (III), permanecen *invariantes* en las sustituciones lineales enteras de módulo no nulo y del tipo [8.2] aplicadas a las variables, x, del sistema. La característica h de un sistema y el número $m - h$, son también *invariantes*.

En particular, la figura correspondiente a cualquier sistema idéntico, es todo el *espacio*.

Los resolventes son, en realidad, *covariantes* del sistema. Por esta razón, cuando son principales, definen una propiedad geométrica común a todos los sistemas iguales entre sí que es la *figura* a la cual ellos pertenecen.

En el capítulo tercero veremos cómo es posible obtener otro *invariante*, de naturaleza muy distinta al resolvente de un sistema, el cual nos permitirá definir la *forma* de una figura. De ese modo, los conceptos de *región* de puntos, *figura* y *forma*, tan usados en *Geometría*, adquirirán un sentido preciso; particularmente estos dos últimos.

La característica h del sistema S_h (m, n) y de todo sistema igual a él, es *la dimensión* de la figura que corresponde a los sistemas particulares obtenidos asignando valores arbitrarios a las $n - h$ incógnitas no principales, si las hay. Este número es también la dimensión del espacio mínimo dimensional que puede contenerla. Se llamará *espacio de pertenencia* [1] *de la figura particular*, relativa a la del sistema considerado.

Es inmediato que:

XI) *Toda figura de dimensión h, puede pertenecer a un espacio lineal de dimensión n, mayor que h*, pues basta agregar a cada inecuación de cualquier sistema que la define, $n - h$ nuevas variables de modo que la característica del sistema siga siendo todavía h, lo cual es siempre posible.

De los teoremas (III) y (IV) se pueden deducir condiciones puramente geométricas que caracterizan la *afinidad*, pero como el objeto de este trabajo, es el estudio general de la forma con independencia de toda propiedad métrica, no nos ocuparemos de ello. Creemos útil hacer notar, de paso, que con el mismo procedimiento, se pueden estudiar la *semejanza*, la *homotecia*, y por medio de sustituciones ortogonales, los *movimientos* y *pseudo-movimientos* y caracterizarlos por los elementos de la matriz del sistema.

[1] Véase E. Bertini. Obra citada, pág. 12 al pié, de donde hemos tomado tal designación.

Sería, por ejemplo, interesante en el estudio de las congruencias, la investigación de criterios para que dos figuras sean *congruentes*, o más general, *iguales*. Lo único que se conoce, en estas cuestiones, es el teorema de CAUCHY (1) sobre la igualdad de dos poliedros convexos del espacio ordinario.

9. **Reducción de un sistema compatible.** Hemos estudiado algunas propiedades de los sistemas irreducibles, pero no hemos dado, hasta ahora, ninguna regla para reducir efectivamente un sistema de modo que carezca de inecuaciones sobrantes.

Es claro que la propiedad (3, III), por sí sola no permite, en general, efectuar tal reducción, porque un polinomio lineal de más de una variable independiente, tiene infinitos ceros. Lograremos este objeto, mediante los resolventes principales del sistema cuya expresión general, para el caso propio, ha sido establecida en el número (7), fórmula [7.1].

Notemos también que en el caso de sistemas *idénticos* no hay problema, como tampoco en el caso (4, *a*), de resolventes impropios, porque en el primero, todas las inecuaciones son sobrantes y en el segundo, no sobra ninguna. Solamente se presenta la cuestión en el caso (4, *b*), es decir, de un resolvente propio.

Con tal objeto probaremos antes que:

I) *En un resolvente principal propio,* $R_h(\delta)$, *de un* $S_h(m, n)$ *irreducible no todos los coeficientes* α_{rj}, α_{sj}, *de una misma ecuación pueden tener signo opuesto al signo del determinante principal* δ *ni ser todos nulos. En particular, en toda ecuación homogénea de* $R_h(\delta)$, *hay más de un coeficiente* α_{sj} *de signo opuesto al signo de* δ.

En primer lugar, si todos los coeficientes de una misma ecuación de $R_h(\delta)$, tuviesen signo opuesto al signo de δ, como las variables X_j no son negativas, para ningún cero de la correspondiente X_{h+p}, de una ecuación homogénea o no, de $R_h(\delta)$, se satisfarían en [7.1] todas las demás inecuaciones del sistema y, en consecuencia (3, III), la inecuación $P_{h+p}(x) > 0$, sería sobrante, contra lo supuesto.

Si todos los coeficientes α_{rj} o α_{sj} de una ecuación homogénea o no de $R_h(\delta)$ fuesen nulos ello querría decir (4), que la correspondiente inecuación es combinación lineal, con números no negativos de otras del sistema, o bien una constante no negativa y, por lo tanto, también sobrante.

En segundo lugar, si en una ecuación homogénea de $R_h(\delta)$, hubiese

(1) Véase A. CAUCHY, Tomo I, serie II, pág. 37. *Oeuvres complètes.*

un solo coeficiente α_{sj} de signo opuesto al de δ, ningún cero de su correspondiente variable X_j, satisfaría a todas las demás inecuaciones del sistema, como lo prueba inmediatamente la expresión [7.1]. Por la misma razón, la inecuación $P_j(x) > 0$ sería sobrante.

Obs.: El teorema precedente puede ser útil, a veces, para reducir un sistema, pero no siempre se lograrán eliminar todas las inecuaciones sobrantes porque no es cierto el recíproco, como lo prueba el siguiente:

Ejemplo: Sean

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ -x - y + 1 > 0 \\ 2x - y + 2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X_1 & [1] \\ y = X_2 & [2] \\ -x - y + 1 = X_3 & [3] \\ 2x - y + 2 = X_4 & [4] \end{cases}$$

un sistema y su adjunto.

Un resolvente principal con respecto al determinante (12) puede escribirse (4, IV) en la forma:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ -1 & -1 & X_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ 2 & -1 & X_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

De donde

$$\begin{cases} X_3 + X_2 + X_1 = 1 \\ X_4 + X_2 - 2X_1 = 2. \end{cases}$$

Los coeficientes de la última ecuación de este resolvente principal no son todos de signo opuesto al signo del coeficiente de X_4 y sin embargo la inecuación correspondiente, es decir la

$$2x - y + 2 > 0$$

es sobrante en el sistema dado.

En efecto, basta probar (3, III) que ninguno de sus ceros satisface a las demás del sistema. Es decir que el sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ -x - y + 1 > 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

es incompatible. En efecto, resulta el sistema equivalente siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rl} x & > 0 \\ 2x + 2 & > 0 \\ -3x - 1 & > 0 \\ y & = 2x + 2 \end{array}\right. \qquad [\alpha]$$

que es evidentemente incompatible, puesto que en la primera inecuación es $x > 0$, mientras que en la tercera debe ser $x < -\frac{1}{3}$. A la misma conclusión se llega aplicando el criterio general de compatibilidad (4, VIII), al sistema de las tres primeras inecuaciones del [α].

Se puede, sin embargo, dar una regla general válida para todos los casos mediante la cual lograremos la reducción total de un $S_h(m, n)$ compatible. En primer lugar observaremos que de la definición (4, *b*) de resolvente principal de un sistema $S_h(m, n)$ se deduce inmediatamente que:

II) *Si un sistema no es totalmente singular, todas las variables auxiliares paramétricas de sus resolventes principales*, o lo que es lo mismo, *todas las filas de sus determinantes principales, corresponden a polinomios principales del sistema y* recíprocamente, *todo polinomio de un sistema no totalmente singular, corresponde a alguna variable auxiliar paramétrica de algún resolvente principal del mismo.*

Esta conclusión no subsiste para un sistema totalmente singular. Basta recordar (4, *b*) que en este caso, para formar un determinante principal δ, de R_h (δ), se eligen $h - 1$ polinomios principales solamente y otro cualquiera del sistema con la única condición que no resulte nulo el determinante δ formado con las h filas correspondientes.

Así, pues, solo podemos afirmar que en cada h variables auxiliares paramétricas de las ecuaciones de un R_h (δ) principal relativo a un $S_h(m, n)$ totalmente singular, hay, por lo menos, $h - 1$, que corresponden a polinomios principales del sistema.

En este caso el siguiente teorema permite también reconocer cuáles son las que corresponden a polinomios principales:

III) *Si en la matriz de coeficientes de un resolvente principal* R_h (δ) *de un sistema totalmente singular existe una sola columna cuyos elementos* (no todos nulos) *tienen signo opuesto al signo de* δ, *la relativa variable auxiliar paramétrica corresponde a una inecuación sobrante en el sistema* y recíprocamente, *toda inecuación sobrante que*

no sea combinación lineal de otras, en un sistema tal, corresponde a una variable auxiliar paramétrica de un $R_h(\delta)$ *cuya matriz tiene la mencionada propiedad en la columna de coeficientes relativos a dicha variable paramétrica y solamente a ella.*

En efecto, en cuanto al teorema directo es inmediato, pues si en el $R_h(\delta)$ existe una sola columna X_j con coeficientes de signo opuesto al de δ, como todas sus ecuaciones son homogéneas, puesto que el sistema es totalmente singular, en virtud de (I) ningún cero de X_j satisface a todas las demás inecuaciones, luego $P_j(x) > 0$ es sobrante.

En cuanto al recíproco, si X_j corresponde a una inecuación sobrante no combinación lineal de otras del sistema, elegidas $h - 1$ principales, formemos el correspondiente $R_h(\delta)$ de modo que X_j sea también variable auxiliar paramétrica en éste, lo cual es posible (4, V) porque resultará $\delta \neq 0$. Ahora bien siendo X_j sobrante, ningún cero de ella puede satisfacer a todas las demás del sistema, luego en el $R_h(\delta)$ considerado no puede haber ninguna otra columna con coeficientes de signo opuesto al de δ, y como $R_h(\delta)$ es principal, la única que goza de esta propiedad es la columna j, (4, V).

El teorema (4, VIII), y estos últimos limitan el problema de la compatibilidad y el de la reducibilidad de un sistema, a la obtención de sus resolventes. Para ello, dado un sistema, eligiremos una matriz principal cualquiera. Habrá en el sistema $S_h(m, n)$ dado, $\binom{m}{h}$ resolventes a lo sumo. Si entre éstos hay alguno principal, el sistema es compatible de lo contrario, no es compatible.

Si el sistema es compatible, formemos todos sus resolventes principales. Los dos teoremas precedentes permiten obtener la reducción final del sitema a sus inecuaciones principales y solamente a éstas. Resulta, en definitiva, la regla siguiente:

IV) *Para reducir un sistema* $S_h(m, n)$ *compatible a sus inecuaciones principales y solamente a éstas se procede del siguiente modo:*

a) Si $S_h(m, n)$ *no es totalmente singular, se forman todos sus determinantes principales,* (son en número finito), *las filas que, eventualmente, no pertenecen a ninguno de éstos, corresponden a inecuaciones sobrantes, y de este modo,* (II), *se obtienen todas.*

b) Si $S_h(m, n)$ *es totalmente singular, se forman todos sus resolventes principales,* (son en número finito). *La aplicación del teorema* (III), *permite determinar todas las inecuaciones sobrantes.*

Ejemplo 1:

Es fácil ver que en el sistema siguiente no totalmente singular,

$$\begin{cases} x > 0 & [1] \\ y > 0 & [2] \\ z > 0 & [3] \\ -x-y-z+1>0 & [4] \\ x+y-z+2>0 & [5] \end{cases}$$

la inecuación

$$x+y-z+2>0$$

es la única sobrante, pues el sistema admite solamente los siguientes determinantes principales: (123) ; (124) ; (134) ; (234) , escritos según la notación del número 1.

Ejemplo 2:

En el sistema totalmente singular

$$\begin{cases} x > 0 \\ -x-y+1>0 \\ x-y+1>0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = X_1 & [1] \\ -x-y+1 = X_2 & [2] \\ x-y+1 = X_3 & [3] \end{cases}$$

sus resolventes principales, se reducen al siguiente

$$-X_3+X_2+2X_1=0\,,$$

en el cual, de acuerdo con (I) y con (III), el polinomio correspondiente a X_3, es decir, la última inecuación, es sobrante en el sistema, pues para $X_3=0$; no se verifica la precedente relación, con $X_1>0$, $X_2>0$.

Nótese que mediante los resolventes quedan automáticamente eliminadas todas las inecuaciones del sistema que, eventualmente, sean combinaciones lineales con números no negativos de otras inecuaciones del mismo.

Más adelante veremos que el estudio de los sistemas totalmente singulares, que aparentemente, presentan anomalías, se reduce al de sistemas regulares. Entonces daremos un criterio más uniforme para la reducción de sistemas.

En virtud de esto, y aún cuando no lo digamos explícitamente, en todo lo que sigue nos referiremos siempre a sistemas *irreducibles*. Es decir, a sistemas que carecen de inecuaciones sobrantes (3).

Es también útil para ciertas cuestiones la operación inversa a la *reducción* de un $S_h\,(m,\,n)$. Es decir, la que consiste en *agregar* a un sistema dado, una nueva inecuación de modo que el sistema $S_h\,(m+1, n)$ así formado, sea equivalente al dado. O sea que dicha

inecuación resulte sobrante en el $S_h\ (m+1, n)$. Y es claro que esta operación puede hacerse con todo sistema, pero demostraremos que:

V) *A todo sistema compatible* $S_h\ (m, n)$ *se puede agregar una inecuación, no combinación lineal de otras del sistema, de modo que resulte sobrante en el* $S_h\ (m + 1, n)$ *así obtenido, y tal, que cada uno de sus coeficientes dependa linealmente de h variables positivas arbitrarias.*

Sean, en efecto,

$$\mu_{r1}\ ,\ \mu_{r2},\ \ldots,\ \mu_{rh},\ \ldots,\ \mu_{rn},\ \mu_r$$

los coeficientes y término independiente de la nueva inecuación. Por lo pronto, tratemos que el nuevo sistema $S_h\ (m + 1, n)$ tenga característica h, igual a la del $S_h\ (m, n)$. Esto se logrará tomando los coeficientes

$$\mu_{r,h+1}\ ,\ \mu_{r,h+2}\ ,\ \ldots,\ \mu_{rn}\ ,$$

de modo que cada uno sea una conveniente combinación lineal de los h restantes

$$\mu_{r1}\ \ ,\ \ \mu_{r2},\ \ldots\ \mu_{rh}\ .$$

Para que la nueva inecuación resulte sobrante, bastará, (I), que los coeficientes α_{rj} de la ecuación relativa a la fila r, en un resolvente principal de $S_h\ (m + 1, n)$ con respecto a un determinante común, δ, de ambos sistemas, tengan signos opuestos al signo de δ. Así, pues, para determinar los h coeficientes

$$\mu_{r1}\ ,\ \mu_{r2}\ ,\ \ldots,\ \mu_{rj}\ ,\ \ldots,\ \mu_{rh}$$

se obtienen las h inecuaciones siguientes

$$Sg.\ \alpha_{rj} = -\ Sg.\ \delta. \qquad (j = 1, 2\ 3, \ldots, h).$$

Desarrollando los determinantes α_{rj} resultan h inecuaciones lineales en las incógnitas μ_{rj} cuyos coeficientes son todos los menores de orden $h - 1$ del determinante δ. El determinante del sistema precedente está formado, pues, por todos los de orden $h - 1$ de δ, Es, en consecuencia, el determinante adjunto de δ y, por lo tanto no es cero. Entonces el sistema tiene h inecuaciones y característica h, luego (4, *a*), todas sus incógnitas μ_{rj}, son funciones lineales de h indeterminadas positivas arbitrarias.

Por otra parte el determinante orlado Δ_r de δ con la fila agregada, debe tener, en virtud de la compatibilidad (4, V), signo igual al signo de δ. Fijado, con esta condición, cualquier valor a Δ_r, se logra también expresar linealmente en función de este valor y de las h indeterminadas positivas arbitrarias, el término independiente μ_r.

El teorema queda así demostrado por cuanto cada uno de los coeficientes de la inecuación sobrante resulta una función lineal de h variables positivas arbitrarias.

Obs.: Nótese que esta operación de agregar inecuaciones de modo que resulten sobrantes, no altera la igualdad de dos o más sistemas porque tampoco modifica sus resolventes principales.

Antes de terminar este capítulo demostremos la propiedad fundamental en base a la cual pueden ser investigados muchos caracteres métricos de las figuras de sistemas iguales entre sí.

Para ello bastará establecer las condiciones en virtud de las cuales la sustitución [8.2] que transforma un sistema en otro resulta, además, *ortogonal*. Probaremos que:

VI) *La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas iguales,* $S_h(m,n)$ y $S_h'(m,n)$ (no idénticos), *sean transformables entre sí mediante una sustitución ortogonal entre sus incógnitas principales, es que existan sendas matrices principales en ambos sistemas, tales que la suma de los cuadrados de los coeficientes de estas incógnitas en cada una de las inecuaciones de un sistema, sean iguales a la suma de los cuadrados de los coeficientes homólogos en las correspondientes inecuaciones del otro sistema.*

La condición es necesaria. En efecto, puesto que $S_h(m,n)$ y $S_h'(m,n)$ son iguales, (8), existe una sustitución [8.2] que transforma un sistema en el otro.

Se tendrá [8.4]:

$$a_{i1}\,\beta_{1p} + \ldots + a_{ij}\,\beta_{jp} + \ldots + a_{ik}\,\beta_{kp} + \ldots + a_{ih}\,\beta_{hp} = a'_{ip}$$

$$(p = 1, 2, 3, \ldots, h).$$

Elevando al cuadrado y sumando respecto de p

$$\sum_{p=1}^{p=h} (\Sigma_{j,k}\, a_{ij}\, a_{ik}\, \beta_{jp}\, \beta_{kp}) = \sum_{p=1}^{p=h} a'^2_{ip} \qquad [9.1]$$

$$(j\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots, h).$$

Escribiendo separadamente las sumas de cuadrados ($j = k$) y las de los dobles productos ($j \neq k$), se tiene

$$\sum_{p=1}^{p=h} (\Sigma\, a_{ij}^2\, \beta_{jp}^2) + \sum_{p=1}^{p=h} (\Sigma_{j,k}\, a_{ij}\, a_{ik}\, \beta_{jp}\, \beta_{kp}) = \sum_{p=1}^{p=h} a'^2_{ip}\,.$$

Desarrollando estas sumas y siendo para cada j y k fijos, por hipótesis

$$\sum_{p=1}^{p=h} \beta_{jp}^2 = 1 \quad ; \quad \sum_{p=1}^{p=h} \beta_{jp}\,\beta_{kp} = 0\,, \qquad (j \neq k)$$

resulta

$$\sum_{j=1}^{j=h} a_{ij}^2 = \sum_{p=1}^{p=h} a_{ip}'^2\,. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

La condición es suficiente. Para demostrar esto, agreguemos, si es necesario, a ambos sistemas $S_h\,(m, n)$ y $S'_h\,(m, n)$ iguales, un conveniente número de inecuaciones sobrantes, elegidas de manera que la suma de los cuadrados de los coeficientes de las incógnitas principales en una, sean iguales a las sumas análogas de la correspondiente inecuación en el otro sistema y que, además, para los sistemas así formados, la matriz del sistema cuadrático

$$\sum_{p=1}^{p=h} (\Sigma_{j,k}\, a_{ij}\, a_{ik}\, \beta_{jp}\, \beta_{kp}) = \sum_{p=1}^{p=h} a_{ip}'^2 \qquad [9.2]$$

$$(j, k = 1, 2, 3, \ldots, h)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, m')$$
$$m' \geqq m$$

y la de su análogo que se obtiene cambiando en éste las a por las a' y viceversa, resulten tener característica igual a $\frac{h\,(h+1)}{2}$, igual al número de términos de la [9.2]. Los coeficientes de las nuevas inecuaciones los indicamos también con a_{ij} y a'_{ij} respectivamente y con c_i y c'_i los correspondientes términos independientes. Dichas condiciones son siempre posibles de ser cumplidas, en virtud de (V) porque cada coeficiente de las inecuaciones sobrantes agregadas es función lineal de h variables positivas arbitrarias.

Desarrollando todas las sumatorias de [9.2] y considerando como incógnitas cada suma de cuadrados para un mismo valor de $j = k$ fijo y para $p = 1, 2, 3, \ldots, h$; y también como incógnitas cada suma de productos binarios para cada $j \neq k$, fijos y $p = 1, 2, 3, \ldots, h$; resulta en [9.2], un sistema lineal compatible no homogéneo puesto que no siendo idéntica ninguna inecuación de dichos sistemas las $\sum_{p=1}^{p=h} a_{ip}'^2$ no son nulas. Además es un sistema con solución única porque es única (8, III), la sustitución unimodular [8.2]. Resolviendo este sis-

tema por la conocida regla de CRAMER queda inmediatamente probada la proposición. Basta observar que el determinante de cada incógnita resulta igual al del sistema, cuando en lugar de los coeficientes de una suma de cuadrados en éste, se ponen los términos independientes, para los cuales, se tiene, por hipótesis

$$\sum_{p=1}^{p=h} a'^2_{ip} = \sum_{j=1}^{j=h} a^2_{ij} ,$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, m')$$

y es igual a cero cuando dichos términos sustituyen a los coeficientes de una suma de productos binarios.

Será útil también, para tal objeto, hacer notar una interesante propiedad métrica del resolvente de un sistema. Si en un resolvente [7.1], de un $S_h\,(m, n)$ se pone

$$X_h = X_{h-1} = \ldots = X_1 = 0 ,$$

es decir, se considera un sistema subordinado de orden h, indicando con $X^0{}_{h+r}$ el valor que toman las otras variables auxiliares no paramétricas, resulta

$$X^0{}_{h+r} = \frac{\Delta_r}{\delta}$$

$$(r = 1,2,3, \ldots, m - h).$$

Dividiendo este número por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de las incógnitas principales de la inecuación correspondiente a la variable auxiliar X_{h+r}, en el sistema, pues dicha suma no es nunca nula para un $S_h\,(m, n)$ irreducible, se obtiene la *distancia* d_{h+r}, del o de los puntos de dicho sistema subordinado de orden h al correspondiente hiperplano dado por la ecuación

$$P_{h+r}\,(x) = 0 .$$

Luego:

$$d_{h+r} = \frac{\Delta_r}{\delta \sqrt{a^2{}_{h+r,1} + a^2{}_{h+r,2} + \ldots + a^2{}_{h+r,h}}} \qquad [9.3]$$

$$(r = 1, 2, 3, \ldots, m - h).$$

CAPITULO II

§ 3. - CARACTERES GENERALES DE LOS SISTEMAS NORMALES

10. **Sistemas subordinados compatibles de un $S_h(m, n)$.** Vamos a estudiar, ahora, los sistemas subordinados compatibles de diversos órdenes que *pertenecen* a un mismo sistema, es decir, que se deducen de él, anulando polinomios y conservando las demás inecuaciones, si las hay. Recordemos que según las notaciones usadas en el capítulo I, son correspondientes los elementos siguientes:

$P_i(x)$, polinomio de $S_h(m, n)$;
i, fila de la matriz ampliada $M_h(m, n)$, del sistema;
X_i, variable auxiliar del sistema adjunto de $S_h(m, n)$, relativa al polinomio $P_i(x)$, y a la fila i de $M_h(m, n)$.

Dado un sistema compatible, todo sistema subordinado suyo de orden s, queda unívocadamente determinado cuando se dan, además, los s polinomios nulos, o correspondientemente, las s variables auxiliares nulas, en su sistema adjunto. Diremos, indistintamente, que se ha considerado el sistema subordinado de orden s del sistema, *relativo* a dichos polinomios, o a sus correspondientes variables auxiliares.

Como, (3, VI), los sistemas idénticos carecen de sistemas subordinados, cuando hablemos del sistema subordinado de un $S_h(m, n)$, sobreentenderemos que el $S_h(m, n)$ no es idéntico.

Es claro que el sistema resolvente de un sistema subordinado de $S_h(m, n)$ se deduce de un resolvente cualquiera de éste, anulando las correspondientes variables auxiliares, como resulta, inmediatamente, de las relaciones entre el sistema y su adjunto [4.2]. Pero interesan solamente los sistemas subordinados compatibles de un sistema $S_h(m, n)$ dado. Ellos se pueden obtener de los resolventes principales de $S_h(m, n)$ investigando en éstos, cuáles son los grupos de variables auxiliares que pueden ser anuladas de manera que los nuevos resolventes, así obtenidos, resulten tambien principales. A cada grupo de tales variables auxiliares nulas corresponde un único sistema subordinado compatible del $S_h(m, n)$, dado.

Todos los sistemas subordinados compatibles, cuyos resolventes principales se deducen de un mismo resolvente principal del sistema dado, quedan así perfectamente determinados. Diremos que *pertenecen* a dicho resolvente.

Ahora bien, la investigación de tales sistemas subordinados de todos los órdenes posibles se hace cómodamente formando todos los resolventes principales del sistema, los cuales son en número finito (4), y viendo cuáles son, en cada uno de ellos, los grupos de sus variables auxiliares paramétricas que pueden ser anuladas, de modo que haya ceros comunes de éstas que satisfagan a las demás, o por lo menos, que no las hagan negativas.

La importancia de esta cuestión resulta evidente, si se tiene en cuenta (5), que los sistemas subordinados compatibles de un $S_h(m,n)$, permiten determinar el *contorno* de la región que corresponde al sistema y, por lo tanto, son elementos indispensables para el estudio de la *figura* y de la *forma*.

Podemos pues, concluir, en base a los teoremas del número (4), relativos a la compatibilidad, que:

I) *La condición necesria y suficiente para que un sistema subordinado de orden s relativo a s polinomios dados de un* $S_h(m, n)$ *irreducible, sea compatible es:*

a) Si $s < h$, *que exista, por lo menos, un resolvente principal del sistema entre cuyas variables auxiliares paramétricas figuren las correspondientes a las de los s polinomios dados;*

b) si $s \geqq h$, *que entre todos los resolventes del sistema cuyas variables auxiliares paramétricas correspondan a h polinomios de los s dados, haya, por lo menos, un resolvente principal;*

c) que, en ambos casos, almenos un cero común a dichos s variables auxiliares paramétricas, no haga negativas a las demás variables auxiliares que figuran en el correspondiente resolvente principal del sistema.

En el primer caso *a*), el o los resolventes principales del sistema subordinado dado que así se obtienen, resultan tener $h - s > 0$ variables auxiliares paramétricas.

En el segundo caso *b*), el o los resolventes principales se reducen, a lo sumo, a $m - h$ ecuaciones sin variables auxiliares paramétricas. Es claro que, cuando en este caso, sea, además, $h = m$, que es el de un resolvente impropio, no resulta ninguna ecuación. Pero el teorema es inmediato (4, *a*), porque, entonces, es también $s = h$.

Se deduce que:

II) *Todos los sistemas subordinados compatibles pertenecientes a un mismo resolvente* $R_h(\delta)$ *del sistema tienen un determinante principal común, que es el de* $R_h(\delta)$.

Para un resolvente principal regular de un $S_h(m,n)$, resultan las propiedades siguientes que permiten, reconocer en este caso, todos los sistemas subordinados compatibles que pertenecen a él:

III) *Si* δ *es el determinante principal de un resolvente regular de un* S_h (m, n) *irreducible, todos los sistemas subordinados que resultan de anular* $h - 1$ *polinomios cualesquiera correspondientes a las filas de* δ, *son compatibles.*

Puesto que el resolvente es regular y S_h (m, n) es irreducible, carece de ecuaciones homogéneas. Dichos polinomios corresponden, (4), a las variables auxiliares principales del resolvente dado. Anulándolas, se obtienen siempre resolventes también principales, como prueba el sistema [4.3]. Por lo tanto, los correspondientes sistemas subordinados (4, V), son también compatibles.

Recíproco:

IV) *Si todos los sistemas subordinados que se obtienen anulando* $h - 1$ *polinomios cualesquiera entre h dados de un* S_h (m, n) *irreducible, son compatibles, el resolvente, cuyo determinante* δ *está formado por las filas correspondientes a dichos h polinomios, es un resolvente principal regular del sistema.*

Sea R_h (δ), el resolvente en cuestión. El es principal (4, *b*). Veamos que R_h (δ) es regular. En efecto, si no fuese regular, habría en él, por lo menos [4.3], una ecuación homogénea; como [9, I], en esta ecuación algún determinante α_{sj}, tiene necesariamente signo igual a δ, puesto que S_h (m, n) es irreducible, el sistema subordinado de orden $s = h - 1$ en el cual es

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_p = 0 \quad ; \quad X_j \neq 0 \qquad j \leqq h \,,$$

resulta, (4, *b*), incompatible, contra lo supuesto. Es claro que para un resolvente impropio, la propiedad es inmediata (4, *a*).

Estos dos teoremas, directo y recíproco, permiten obtener fácilmente todos los sistemas subordinados compatibles de orden $h - 1$ de un S_h (m, n) que pertenecen a un mismo resolvente principal regular del sistema. En cuanto a la determinación de los que pertenecen a un resolvente singular, si lo tiene, la reduciremos más tarde al caso regular.

Resulta también inmediatamente de (4, V) que:

V) *Si* δ *es el determinante principal de un resolvente regular de un* S_h (m, n) *irreducible, todos los sistemas subordinados que resultan de anular* 1, 2, ..., *s*, ..., *h, polinomios correspondientes a las filas de* δ, *son compatibles.*

11. **Sistema fundamental de un sistema subordinado.** Sea S' un sistema subordinado compatible de un S_h (m, n) relativo a $s \leqq m$ polinomios dados del sistema. Podemos suponer que éstos

son los s primeros. El sistema adjunto de S', será, entonces, de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n + c_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}\,x_1 + a_{s2}\,x_2 + \ldots + a_{sn}\,x_n + c_n = 0 \\ a_{s+1,1}\,x_1 + a_{s+1,2}\,x_2 + \ldots + a_{s+1,n}\,x_n + c_{n+1} = X_{s+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x + c_i = X_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n + c_m = X_m\ ; \end{array}\right. \qquad [11.1]$$

el cual resulta de anular en el sistema adjunto del sistema dado las s primeras variables auxiliares.

Estudiemos el sistema precedente, según que sea $s < h$, o bien $s \geqq h$, siendo, como de costumbre, h la característica del sistema dado.

a) $s < h$. En esta hipótesis, en virtud de (10, I), existe un resolvente principal $R_h\ (\delta)$ del sistema, entre cuyas variables auxiliares paramétricas figuran las s dadas. Podemos suponer también, sin restricción, que el determinante principal δ del $R_h\ (\delta)$, resolvente que puede ser propio o impropio, esté formado también por las h primeras filas y las h primeras columnas de la matriz del sistema dado. Siendo s, la característica subordinada de S', en las hipótesis hechas, es distinto de cero el determinante

$$\delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1s} \\ a_{21} \ldots a_{2s} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{s1} \ldots a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

Por lo tanto, en el sistema parcial del [11.1] formado por las s ecuaciones, se podrán expresar las s primeras incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_s$, en función de las $n - s$ restantes. Se tendrán determinantes de la forma

$$\delta_s . x_1 = \begin{vmatrix} Q_1\ a_{12} \ldots a_{1s} \\ Q_2\ a_{22} \ldots a_{2s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_p\ a_{p2} \ldots a_{ps} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_s\ a_{s2} \ldots a_{ss} \end{vmatrix} = H_1\ ,$$

siendo

$$Q_p = -\,a_{p,s+1}\,x_{s+1} - a_{p,s+2}\,x_{s+2} -, \ldots, -\,a_{p,n}\,x_n - c_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, s)\ .$$

Análogamente

$$\delta_s \, x_p = H_p$$

en donde H_p es un determinante igual al precedente formado sustituyendo en el δ_s la columna p, por la de los polinomios Q_p, según la conocida regla de CRAMER.

El sistema S', es equivalente al sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1 = \dfrac{H_1}{\delta_s} \\
\cdots\cdots \\
\cdots\cdots \\
x_s = \dfrac{H_s}{\delta_s} \\
a_{s+1,1}\dfrac{H_1}{\delta_s} + \ldots + a_{s+1,s}\dfrac{H_s}{\delta_s} + a_{s+1,s+1}\,x_{s+1} + \ldots + a_{s+1,n}\,x_n + c_{s+1} = X_{s+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i1}\dfrac{H_1}{\delta_s} + \ldots + a_{is}\dfrac{H_s}{\delta_s} + a_{is+1}\,x_{s+1} + \ldots + a_{in}\,x_n + c_i = X_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}\dfrac{H_1}{\delta_s} + \ldots + a_{m,s}\dfrac{H_s}{\delta_s} + a_{m,s+1}\,x_{s+1} + \ldots + a_{m,n}\,x_n + c_m = X_m .
\end{array}\right.$$

Con fáciles cálculos resulta:

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1 = \dfrac{H_1}{\delta_s} \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_s = \dfrac{H_s}{\delta_s} \\
\dfrac{1}{\delta_s}\left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} & a_{1,s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} & a_{s,s+1} \\ a_{i1} & \ldots & a_{is} & a_{i,s+1} \end{vmatrix} x_{s+1} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} & c_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} & c_s \\ a_{i1} & \ldots & a_{is} & c_i \end{vmatrix} \right\} = X_i
\end{array}\right. \qquad [11.2]$$

$$(i = s + 1,\ s + 2,\ \ldots,\ m).$$

Interesa especialmente el sistema residual S'', constituído por las $m - s > 0$ inecuaciones y por las $n - s > 0$ incógnitas de [11.2]. Lo llamaremos *sistema fundamental* del sistema subordinado S'.

Es fácil probar que la característica de este sistema fundamental S'', es igual a $h - s$; para ello basta observar que, si en el resolvente

principal R_h (δ), se anulan las s variables auxiliares paramétricas relativas a los polinomios nulos del sistema S', resulta, en virtud de (10, I) y de (4, V), un resolvente también principal del sistema S'' con $h - s$ variables auxiliares paramétricas, y este número es precisamente, (4), igual a la característica del sistema S''.

Esta conclusión resulta también directamente. Pero el camino es mucho más largo y laborioso. Sería preciso para ello, formar la matriz del sistema fundamental y recordar las relaciones existentes entre los determinantes cuyos elementos son, a su vez, determinantes formados con las filas y columnas de otro determinante.

b) $s \geqq h$. En este caso, también en virtud de (10, I), existe un resolvente principal R_h (δ), del sistema cuyas h variables paramétricas corresponden a h polinomios de los s dados. Por otra parte el sistema [11.2] prueba que, si es, además, $h < m$, los primeros miembros de as $m - s > 0$ últimas relaciones, se reducen a constantes no negativas. Luego el sistema fundamental S'', del sistema subordinado S', es un sistema idéntico, tiene, por lo tanto, característica nula. Si es $h = m$, dicho sistema no existe, porque en tal caso, R_h (δ) es impropio. Cuando esto ocurra, convendremos en decir que también se obtiene un sistema fundamental S'' que se verifica idénticamente. Esta convención está justificada, si se tiene en cuenta que a todo sistema se le puede agregar cualquier número de inecuaciones idénticas. En resumen:

I) *Todo sistema fundamental de un sistema subordinado compatible de orden s de un* S_h (m, n), *es también compatible y tiene característica igual a* $h - s$ *para todo* $s < h$ *y nula para todo* $s \geqq h$.

Se puede probar también inmediatamente que:

II) *Existen infinitos sistemas iguales a todo sistema subordinado compatible de un* S_h (m, n).

En efecto, si S' es este sistema subordinado compatible de orden s y de característica subordinada k, relativo a s polinomios dados de $S_h(m,n)$ y si es $k < n$, existen a lo sumo $\binom{n}{k}$ sistemas fundamentales del sistema S', los que resultan de elegir en el sistema de las s ecuaciones de S', las k incógnitas principales. Ahora bien, todos estos sistemas S'', como asimismo el sistema S', tienen iguales resolventes porque éstos no dependen de las variables auxiliares paramétricas nulas ni de cuál sea la matriz principal elegida, (8, VI), luego (8), son iguales entre sí; y, como existen (8, IX), infinitos sistemas iguales a uno dado, queda probada la proposición.

Notemos que todos estos sistemas iguales a cualquier sistema fundamental de S' y, por lo tanto, también iguales a éste, tienen la misma

característica, que vale $h' = h - s$, para $s < h$ y *cero* para $s \geqq h$. Este número, es pues, (8), un *invariante* de S'. Lo llamaremos *característica complementaria* del sistema S', que no debe confundirse con la caracteristica h del sistema S', [11.1], compuesto de s ecuaciones y $m - s$ mecuaciones. La designación de característica complementaria está justificada por el hecho de ser

$$h' + k = h ,$$

porque siendo k la característica subordinada del sistema S', es siempre, (1, V),

$$k \leqq h .$$

En este caso, $k = s$ para $s < h$ y $k = h$ para $s \geqq h$.

Obs.: El significado geométrico del número $h' = h - k$ es bien claro. En el sistema S', quedan solamente $n - k$ variables independientes cuyo número es, (1), la dimensión de S'. En cambio el número $h - k$, el cual no supera al $n - k$ puesto que es $h \leqq n$, es la dimensión (8), del espacio de menor dimensión que contiene a toda figura particular relativa a la figura del sistema S', es decir, el espacio de pertenencia de dichas figuras.

Así pues, como k puede tomar todos los valores naturales desde h hasta 0, resulta que los espacios de pertenencia de las figuras de los sistemas subordinados compatibles de un mismo sistema S_h (m, n), tienen todas las dimensiones siguientes:

$$h - k = 0, 1, 2, \ldots, h .$$

Entre éstos presentan particular importancia los de dimensión igual a 1, que corresponden a sistemas subordinados compatibles de orden $s = h - 1$ y que estudiaremos en los números siguientes.

Los coeficientes de los polinomios P'' en los sistemas fundamentales S'', polinomios que, eventualmente, pueden resultar constantes no negativas son, como lo prueba el cálculo indicado precedentemente, determinantes de orden $s + 1$, para todo $s < h$, y para $s \geqq h$, son siempre de orden $h + 1$, divididos, en ambos casos, por el determinante δ_s, no nulo, de orden s del sistema de las s ecuaciones lineales mencionadas. Así, en el polinomio P_i'', el coeficiente de la incógnita x_j se obtiene orlando con la columna j y la fila i el determinante δ_s y dividiendo el determinante que así resulta, por el mismo δ_s.

Estos coeficientes a_{ij}'' de los polinomios P_i'' de uno cualquiera de esos sistemas fundamentales, sus variables auxiliares X_i y las filas i, de la correspondiente matriz, las designaremos con los mismos índices i, de las filas orlantes de δ_s, distintas, naturalmente, de las que corresponden a los s polinomios dados.

Tal notación permitirá, como luego veremos, relacionar fácilmente ciertas propiedades de las filas de la matriz ampliada $M_h\,(m, n)$, del sistema dado, con las de la matriz ampliada de S'', cuya matriz de coeficientes a_{ij}'' designaremos con $M_{h-k}\,(m-s, n-s)$, o simplemente con M_{h-k} y que llamaremos *matriz fundamental de* $M_h\,(m, n)$ relativa a s filas y a s columnas dadas.

Su característica h' la cual vale $h-s$ para todo $s<h$ y *cero*, para todo $s \geqq h$, es (I), la característica complementaria del sistema subordinado S'. La matriz de característica igual a k, correspondiente al sistema de las s ecuaciones del sistema subordinado S', la designaremos con la notación $M_k\,(m, n)$, o simplemente M_k y la llamaremos *matriz parcial* de orden k de la matriz $M_k\,(m, n)$ del sistema S', considerado.

Una matriz fundamental M_{h-k}, relativa a s filas dadas de la matriz $M_h\,(m, n)$, se forma, pues, considerando cualquier determinante δ, no nulo, de orden k, de la matriz parcial (no ampliada) de $M_h\,(m, n)$ constituída por las k filas elegidas entre las s dadas, de modo que el elemento de fila i y columna j de M_{h-k}, sea el determinante orlado de δ con la fila i de $M_h\,(m, n)$ y la columna j de la matriz parcial ampliada M_k considerada dividido por el mismo determinante δ, siendo j, una cualquiera de las $n+1-k$ columnas restantes de ésta, es decir, que no pertenecen al determinante δ, e i, una cualquiera de las otras $m-k$ filas de $M_h\,(m, n)$, distintas de las dadas.

En particular, para $s \geqq h$, las matrices fundamentales ampliadas de M_h, o bien son nulas, o bien tienen su única columna formada con números no negativos. Corresponden a sistemas *idénticos*.

Notemos, finalmente, que existen, a lo sumo, $\binom{n}{k}$ matrices M_{h-k} de una misma $M_h\,(m, n)$ relativa a s filas dadas. Pero como todas corresponden a sistemas fundamentales iguales entre sí, (8, VI) es indiferente tomar una cualquiera de ellas.

Apliquemos, por ejemplo, estas consideraciones a un caso concreto. En el sistema:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + k_1 > 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + k_2 > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i x + b_i y + c_i z + d_i u + k_i > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad (i = 3, 4, \dots, m),$$

sean $\delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ y $h = 4$.

Consideremos su sistema subordinado compatible de segundo orden relativo a los dos primeros polinomios.

Escribamos:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z \quad + d_1 u \quad + k_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \quad + d_2 u \quad + k_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{\delta_2}(a_i \delta_2 x + b_i \delta_2 y + c_i \delta_2 z + d_i \delta_2 u + k_i \delta_2) > 0 . \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones, calculemos las incógnitas x e y:

$$\delta_2 x = \begin{vmatrix} -c_1 z - d_1 u - k_1 , b_1 \\ -c_2 z - d_2 u - k_2 , b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} ;$$

$$\delta_2 y = \begin{vmatrix} a_1 , & -c_1 z - d_1 u - k_1 \\ a_2 , & -c_2 z - d_2 u - k_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} u - \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} .$$

Sustituyendo en todas las demás resulta:

$$\frac{1}{\delta_2}\left[\left(a_i \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_i \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_i\right) z + \left(a_i \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} - b_i \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} d_i\right) u + a_i \begin{vmatrix} b_1 & k_1 \\ b_2 & k_2 \end{vmatrix} - b_i \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} k_i \Big] > 0 .$$

Luego:

$$\frac{1}{\delta_2}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_i & b_i & k_i \end{vmatrix}\right) > 0 .$$

El sistema subordinado es, pues, equivalente al

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u + k_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u + k_2 = 0 \\ \dfrac{1}{\delta_2}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_i & b_i & k_i \end{vmatrix}\right) > 0 . \end{array}\right.$$

$$(i = 3, 4, 5, \ldots, m) .$$

En cambio el sistema fundamental S'' es solamente el formado por:

$$\left\{ \frac{1}{\delta_2}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_i & b_i & k_i \end{vmatrix}\right) > 0 . \right.$$

$$(i = 3, 4, \ldots, m)$$

Según las notaciones indicadas en este número, la matriz del sistema fundamental S'', en consideración, es:

$$\left\| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_i & b_i & d_i \end{vmatrix} \right\|$$

$$(i = 3, 4, 5, \ldots, m) .$$

En cambio, la matriz ampliada parcial de segundo orden del sistema subordinado dado, es:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & k_2 \end{matrix} \right\| ,$$

las que no deben ser confundidas con la matriz ampliada del sistema subordinado, la cual está formada por los coeficientes y términos independientes de todas sus ecuaciones e inecuaciones.

Con respecto a las matrices fundamentales de un sistema y a la matriz del mismo, se tienen las proposiciones siguientes:

III) *Si en la matriz ampliada, M_h (m, n), de un S_h (m, n), h filas dadas, son las de un determinante principal δ del sistema y el sistema S' subordinado, relativo a $s < h$ polinomios que corresponden a s filas de las h dadas, es compatible; en una cualquiera de las matrices fundamentales ampliadas M_{h-s}, relativas a las s filas de tales polinomios, las $h - s$ filas restantes en ella, entre las $m - s$ que contiene, forman tam-*

bién un determinante principal δ'', de orden $h - s$, del correspondiente sistema S'', igual al S' considerado.

Esto es inmediato por cuanto se obtiene, respecto de las h filas dadas un resolvente principal de $S_h\ (m, n)$, en el cual, anulando las s variables auxiliares paramétricas en este resolvente y que corresponden a polinomios principales del sistema, resulta (I), un resolvente principal de S'. Formemos, ahora en un S'' el resolvente cuyas $h - s$ variables auxiliares principales sean precisamente las que corresponden en su matriz M_{h-s}, a las $h - s$ filas restantes de las h dadas. Obtendremos el mismo resolvente anterior, (I). Luego su determinante es también principal.

Recíproco:

IV) *Si en una matriz fundamental ampliada M_{h-s} de la $M_h\ (m, n)$ de un $S_h\ (m, n)$, relativa a $s < h$ filas dadas de ésta, un determinante δ'', de orden $h - s$, es principal del correspondiente sistema S'', el determinante δ, de orden h de $M_h\ (m, n)$, formado por las filas homólogas,* (es decir, del mismo índice), *y las s dadas, es también principal del sistema $S_h\ (m, n)$ dado y el sistema S', subordinado de orden s, relativo a los s polinomios correspondientes a tales filas, es compatible.*

En efecto, puesto que el sistema fundamental S'', correspondiente a la matriz M_{h-s}, es compatible, él es igual (II), a algún sistema subordinado S' de orden s de $S_h\ (m, n)$, el cual tiene que ser necesariamente, por la definición de S'', el relativo a los s polinomios de las $s < h$ filas dadas de $M_h\ (m, n)$. Por lo tanto, de todos los resolventes principales de $S_h\ (m, n)$ que contienen, entre sus variables auxiliares principales, las s de tales polinomios, hay uno solo que contiene, además, a las $h - s$ restantes, puesto que S'' y S' tienen los mismos resolventes principales. En consecuencia, el determinante δ de este resolvente es el mencionado; δ es, pues, principal, y S' es compatible.

En particular,

V) *Si el sistema fundamental es idéntico, el correspondiente sistema S', en $S_h\ (m, n)$, es subordinado compatible de orden $s \geqq h$ y* recíprocamente.

La correspondiente matriz fundamental tiene característica nula.

Obs.: Las propiedades precedentes permiten estudiar los sistemas subordinados compatibles de un $S_h\ (m, n)$ dado, independientemente, en cierto modo, de éste, considerando sistemas iguales a sus correspondientes sistemas fundamentales y, por lo tanto (II), a ellos mismos.

Hemos demostrado en (II) que un sistema subordinado compatible de un $S_h(m, n)$ y su correspondiente sistema fundamental, son iguales entre sí. Geométricamente esto significa, (8), que la

figura de un sistema subordinado compatible, es la misma que la de cualquier sistema fundamental suyo. Dicha figura está completamente caracterizada por todo resolvente principal de este último sistema.

La figura de un sistema no debe ser confundida con la región definida por él. Así, la figura de un sistema fundamental idéntico es (8), todo el espacio. En cambio la región definida por el correspondiente sistema subordinado es el conjunto de puntos que lo satisfacen y que está dado por todas las soluciones de los sistemas de la forma [11.1]. Dicho conjunto puede ser en, particular, un número finito de puntos.

Notemos también que las variables auxiliares que corresponden a los polinomios anulados no forman parte de los resolventes principales del correspondiente sistema fundamental. Es, pues, independiente de éstas. De igual modo, las filas relativas a los polinomios nulos no deben ser tenidas en cuenta en los sistemas fundamentales puesto que no corresponden a ninguna inecuación de éstos, como lo prueba claramente su expresión [11.2].

Un sistema fundamental de un sistema subordinado de un $S_h(m, n)$, puede, a su vez, tener inecuaciones sobrantes. La reducción de estos nuevos sistemas a sus inecuaciones principales, se hará aplicando la regla general (9, IV).

Es claro que del hecho de ser irreducible el sistema dado $S_h(m, n)$, no se sigue que lo sean también sus sistemas subordinados compatibles, porque, en realidad éstos no son sino sistemas parciales, (1), del $S_h(m, n)$ dado, a los cuales se han adjuntado ciertas ecuaciones anulando polinomios del mismo $S_h(m, n)$.

Ejemplo:
Sea el sistema y su adjunto

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ -z > 0 \\ x + y + z + 1 > 0 \\ x + z + 1 > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = X_1 & [1] \\ y = X_2 & [2] \\ -z = X_3 & [3] \\ x + y + z + 1 = X_4 & [4] \\ x + z + 1 = X_5 & [5] \end{cases}$$

Como $(123) = -1$, $(1234) = -1$, $(1235) = -1$, es compatible. Su resolvente principal con respecto a (123) es:

$$\begin{cases} X_4 + X_3 - X_2 - X_1 = 1 \\ X_5 + X_3 + OX_2 - X_1 = 1 \end{cases}$$

en el cual todas las inecuaciones son principales, como resulta de estas últimas relaciones.

Consideremos el sistema subordinado de segundo orden en el cual es $x = z = 0$:

$$\begin{cases} x & & & = 0 \\ & y & & > 0 \\ & & -z & = 0 \\ x & + y & + z + 1 & > 0 \\ x & & + z + 1 & > 0 . \end{cases}$$

Su correspondiente sistema fundamental está dado por

$$\begin{cases} y & > 0 \\ y + 1 & > 0 \\ 1 & > 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y & = X_3 \\ y + 1 & = X_4 \\ 1 & = X_5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} [2] \\ [4] \\ [5] \end{matrix}$$

uno de cuyos resolventes principales es:

$$\begin{cases} X_4 - X_2 = 1 \\ X_5 + 0X_2 = 1 . \end{cases}$$

La primera de estas ecuaciones prueba que la inecuación correspondiente a X_4 es sobrante en el sistema fundamental, pues ningún cero de X_4 satisface a las otras dos. Del mismo modo la segunda, prueba que la correspondiente a X_5, también es sobrante.

Dicho sistema subordinado se reduce a la única inecuación $y > 0$, como resulta, por otra parte, directamente del correspondiente sistema fundamental.

Para la formación efectiva de los resolventes de un sistema $S_h(m, n)$ con resolvente propio respecto de una matriz principal prefijada en la matriz del sistema, convendremos en usar, también, para lo sucesivo, la notación siguiente:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1h} & X_1 \\ a_{21} \ldots a_{2h} & X_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ih} & X_i \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mh} & X_m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1h} & c_1 \\ a_{21} \ldots a_{2h} & c_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ih} & c_i \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mh} & c_m \end{matrix} \right\| \qquad [11.3]$$

o su equivalente:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1h} & X_1 - c_1 \\ a_{21} \ldots a_{2h} & X_2 - c_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i1} \ldots a_{ih} & X_i - c_i \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mh} & X_m - c_m \end{Vmatrix} = 0,$$

cuyo significado es bien claro. La igualdad entre las dos matrices significa que cada determinante de orden $h+1$ en la primera, correspondiente a uno no nulo de orden h, debe ser igualado a su homólogo en la segunda.

Diremos que la [11.3] es el conjunto de sistemas resolventes del $S_h(m, n)$ dado con respecto a la matriz principal prefijada.

En el ejemplo precedente tal conjunto está dado por la igualdad simbólica:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & -1 & X_3 \\ 1 & 1 & 1 & X_4 \\ 1 & 0 & 1 & X_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Es claro que la precedente notación no tiene sentido para un sistema de resolvente impropio. Pero para éstos no interesa, por cuanto tienen un único resolvente principal (4), que es el mismo sistema adjunto.

Las relaciones entre un sistema y las de sus sistemas subordinados compatibles, particularmente, los de primer orden, pueden ser cómodamente investigadas en los resolventes del sistema, como así las relaciones entre la figura de un sistema y la figura de sus sistemas subordinados compatibles. Para ello basta recordar [7.1], que un resolvente está determinado cuando se dan todos los coeficientes de las variables auxiliares X_i y además todos los determinantes orlados del correspondiente determinante principal. Así, pues, un resolvente $R_h(\delta)$ de sistemas de característica h y de m inecuaciones, está determinado dando los

$$h(m-h)+1$$

determinantes de orden h que forman los coeficientes de las va-

riables auxiliares X_i, y los $m - h$ determinantes orlados de δ. En total

$$h(m-h)+1+(m-h)=(h+1)(m-h)+1 \qquad [11.4]$$

condiciones independientes entre sí.

En particular, para $m = h$ resulta una sola condición.

Ahora bien, siendo el resolvente un covariante que define la figura de todos los $S_h(m, n)$ iguales entre sí, podemos pues, afirmar que tales condiciones son las que determinan la correspondiente figura convexa.

Es claro que estas mismas condiciones, puesto que son independientes entre sí, en lugar de darse directamente, pueden también ser dadas indirectamente por medio de sistemas subordinados compatibles de los supuestos sistemas que corresponden a dicha figura. En particular, tales condiciones permiten investigar, en cada caso, cuántas y cuáles son las figuras de sistemas subordinados de primer orden que determinan una figura dada y del mismo modo las relaciones de igualdad entre dos o más sistemas en base a la de sus sistemas subordinados de primer orden.

Hemos visto que para $m = h$ se obtiene una sola condición. Este caso corresponde al de sistemas con resolventes impropios. La figura de éstos queda perfectamente determinada dando su característica h, puesto que, (8), todos los sistemas de resolventes impropios con la misma característica son iguales entre sí.

Una cuestión no exenta de interés en este orden de ideas está planteada por el siguiente:

Probl. 1: *Establecer las condiciones a las cuales deben satisfacer m sistemas compatibles dados de características* $h - 1 < m$,

$$S^1_{h-1}\ ,\quad S^2_{h-1}\ ,\ \ldots,\ S^i_{h-1}\ ,\ \ldots,\ S^m_{h-1}$$

para que exista un sistema compatible $S_h(m, n)$ *de característica h y de m inecuaciones, de modo que cada sistema subordinado suyo de primer orden sea igual a un sistema prefijado de los m dados.*

Indiquemos con $\| a^i_{rs}\ ,\ c^i_r \|$, la matriz ampliada del sistema S^i_{h-1}, con $\| a_{rs}\ ,\ c_r \|$ la del sistema incógnito $S_h(m, n)$ y con $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_m$ sus variables auxiliares no negativas. Supongamos que al sistema subordinado de primer orden de $S_h(m, n)$, en que es $X_i = 0$, corresponda un sistema igual al sistema S^i_{h-1}. Es claro que el sistema S^i_{h-1} no podrá tener más de m inecuaciones

principales, de lo contrario el problema no sería posible porque todo sistema subordinado de un sistema dado no puede tener, por definición (1), más inecuaciones principales que el sistema. Designando, entonces, con $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{m'}$, $(m' \leqq m)$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$, las variables auxiliares del sistema $S^i{}_{h-1}$ y prefijando en los sistemas dados y en el $S_h(m\,,n)$, supuesto existente, las respectivas matrices principales, deben verificarse relaciones de la forma:

$$\left\| \begin{array}{llll} a_{11} & \ldots a_{1h} & X_1 & -c_1 \\ a_{21} & \ldots a_{2h} & X_2 & -c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \ldots a_{i-1h} & X_{i-1} & -c_{i-1} \\ a_{i1} & \ldots a_{ih} & O & -c_i \\ a_{i+1,1} & \ldots a_{i+1h} & X_{i+1} & -c_{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \ldots a_{mh} & X_m & -c_m \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{llll} a^i{}_{11} & \ldots a^i{}_{1h} & X_1 & -c^i{}_1 \\ a^i{}_{21} & \ldots a^i{}_{2h} & X_2 & -c^i{}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^i{}_{i-1,1} & \ldots a^i{}_{i-1h} & X_{i-1} & -c^i{}_{i-1} \\ a^i{}_{i+1,1} & \ldots a^i{}_{i+1h} & X_{i+1} & -c^i{}_{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^i{}_{m'1} & \ldots a^i{}_{m'h} & X_{m'} & -c^i{}_{m'} \end{array} \right\| = 0$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$

igualdad simbólica que expresa la identidad de cada resolvente del segundo miembro con su correspondiente resolvente en el primero. En virtud de (7, V) basta que se verifique solamente para dos. Así, pues, convendrá identificar un resolvente principal del segundo miembro con su correspondiente en el primero, con lo cual se obtendrán todas las condiciones pedidas haciendo tomar a la variable i los valores 1, 2, 3, ..., m.

Es claro que si en cada uno de los m sistemas dados el número de sus inecuaciones es $h - 1$, todos ellos tienen resolventes impropios; según que sea $m = h$, o $m > h$ el $S_h(m\,,n)$ será respectivamente, un sistema con resolvente impropio o propio.

En el primer caso, las relaciones precedentes no existen, pero el problema es inmediato porque todo sistema de característica igual a h y de h inecuaciones cumple la condición. En el segundo caso, existe el primer miembro de las relaciones precedentes pero no, el segundo miembro. El problema se resuelve también fácilmente en este caso, imponiendo al sistema incógnito $S_h(m\,,n)$, la condición de que todos sus sistemas subordinados de primer orden se reduzcan a $h - 1$ inecuaciones principales solamente; con lo cual resultarán todos ellos con resolventes impropios.

Finalmente, todos los sistemas $S_h(m, n)$ que cumplen dichas condiciones, si existen, son iguales entre sí (8). Es decir, pertenecen a una misma figura convexa, la cual queda unívocamente determinada por las m figuras de los m sistemas dados.

Ejemplo 1:
Sean dados los cuatro sistemas siguientes:

$$S_2^1 \quad , \quad S_2^2 \quad , \quad S_2^3 \quad , \quad S_2^4 \quad ,$$

que tengan por resolventes principales respectivamente:

$$\begin{array}{lll} \text{de} & S_2^1 & : \quad X_4 + 2X_3 + 3X_2 = 1 \\ \text{,,} & S_2^2 & : \quad X_4 + 2X_3 + X_1 = 1 \\ \text{,,} & S_2^3 & : \quad X_4 + 3X_2 + X_1 = 1 \\ \text{,,} & S_2^4 & : \quad 2X_3 + 3X_2 + X_1 = 1 \, . \end{array}$$

Es inmediato que todo sistema $S_3(4, 3)$ cuyo resolvente principal es

$$X_4 + 2X_3 + 3X_2 + X_1 = 1$$

tiene como sistemas subordinados de primer orden, sistemas iguales a los dados.

Ejemplo 2:
He aquí otro ejemplo del mismo caso.
Sean dados los siguientes sistemas

$$S_2^1 \quad , \quad S_2^2 \quad , \quad S_2^3 \quad , \quad S_2^4 \quad , \quad S_2^5 \quad ,$$

cuyos respectivos resolventes principales son,

para

$$S_2^1 : \begin{cases} X_3 - X_4 + X_2 = 2 \\ X_5 + 2X_4 - X_2 = 1 \end{cases} \quad ; \quad S_2^2 : \begin{cases} X_3 - X_4 + X_1 = 2 \\ X_5 + 2X_4 - X_1 = 1 \end{cases}$$

$$S_2^3 : \begin{cases} X_2 - X_4 + X_1 = 2 \\ X_5 + 2X_4 - X_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad S_2^4 : \begin{cases} X_3 + X_2 + X_1 = 2 \end{cases}$$

$$S_2^5 : \begin{cases} X_3 + X_2 + X_1 = 2 \, . \end{cases}$$

Todo sistema $S_3(5, n)$, uno de cuyos resolventes principales es

$$\begin{cases} X_3 - X_4 + X_2 + X_1 = 2 \\ X_5 + 2X_4 - X_2 - X_1 = 1 \end{cases}$$

tiene como sistemas subordinados de primer orden sistemas respectivamente iguales a los dados, como resulta de anular sucesivamente en los correspondientes resolventes principales, cada una de las variables paramétricas.

El significado geométrico de estos resultados es muy simple. Los tres primeros sistemas considerados tienen por figuras geométricas en E_2, tres cuadriláteros convexos. Los dos últimos, dos triángulos. Los $S_3(5, n)$ obtenidos tienen por figura, en el espacio E_3, un pentaedro convexo. A cada sistema particular $S_3(5, n)$, uno de cuyos resolventes principales está dado por la precedente expresión, define en el E_3 una región convexa que es un pentaedro cuyas caras son respectivamente *afines* a cada uno de los cinco polígonos dados.

En cuanto a los otros casos mencionados nos ahorramos los ejemplos porque uno de ellos es inmediato y en el otro se procede en forma análoga.

Cuando un conjunto de $m > h - 1$ sistemas de característica $h - 1$ cumplen las condiciones del problema precedente, diremos que ellos constituyen los elementos de orden $h - 1$ de una *configuración convexa* de orden h (1).

Una configuración convexa no forma necesariamente una figura convexa. Así la figura plana del E_2 que resulta de proyectar sobre una cara de un polígono convexo de E_3 los demás vértices y aristas que no pertenecen a ella, más los vértices y aristas de ella misma, constituye una configuración convexa. Y del mismo modo se pueden considerar configuraciones convexas de espacios superiores.

§ 4. — SISTEMAS ACOTADOS — RESOLUCION DE SISTEMAS.

12. **Sistemas finitos y sistemas infinitos.** Diremos que un sistema $S_h(m, n)$ es *acotado,* si todas sus soluciones están acotadas y *no acotado,* en caso contrario.

Teniendo en cuenta el sistema adjunto [4 . 2], del $S_h\ (m, n)$, es fácil probar que:

I) *La condición necesaria y suficiente para que un sistema compatible sea acotado, es que estén acotadas las variables auxiliares X_i de su sistema adjunto y su característica, h, sea igual a su dimensión n.*

De que la condición es necesaria, es inmediato; pues siendo acotado el sistema, están acotadas las variables x_j y, en consecuencia, carece de incógnitas no principales, luego es $h = n$. Por lo tanto, en su sistema adjunto [4.2], resultan también acotadas las variables auxiliares X_i.

La condición es suficiente porque, estando acotadas las variables

(1) Un estudio muy general de las configuraciones geométricas puede verse en la obra del Dr. FRIEDRICH LEVI, *Geometrische Konfiguration.* S. Hirzel, Leipzig, 1929.

X_i y siendo $h = n$, las soluciones x, del sistema resultan todas acotadas, como lo prueba su sistema adjunto [4.2], puesto que las x_j del sistema vienen dadas en función de las X_i solamente.

Obs.: Hemos visto (8) que un sistema S_h (m, n), compatible define una región poliédrica convexa de n dimensiones del espacio euclídeo E_n.

Cuando es $h < n$, según el teorema precedente, el sistema no es acotado, es decir, sus soluciones no están acotadas. La correspondiente región tampoco está acotada en el espacio E_n.

Con respecto a la acotación de un sistema, pueden presentarse diversas eventualidades que será conveniente distinguir, las cuales dependerán de las variables auxiliares X_i de su sistema adjunto y del grado $n - h$ de indeterminación del sistema. Son las siguientes:

a) Todas las X_i están acotadas y el grado de indeterminación del sistema es nulo; es decir, $h = n$.

En este caso, (I) el sistema es acotado y define (8), en el E_n euclídeo una región poliédrica convexa también acotada.

b) No todas las variables X_i están acotadas y el grado de indeterminación del sistema es cualquiera. El sistema no es jamás acotado. Define, (8) en el E_n euclídeo, una región convexa no acotada.

c) Todas las variables X_i están acotadas y el grado de indeterminación del sistema es diferente de cero. Es decir, es $h < n$. En este caso, el sistema no es acotado y tampoco lo es la región que define en el E_n. Pero para todo sistema de valores asignados a sus $n - h \neq 0$ incógnitas no principales, resultan siempre, (I), sistemas particulares acotados. Cada uno de estos sistemas, todos iguales entre sí (8, VI), representa, en E_n, una región poliédrica convexa que está acotada y cuya dimensión es el número h. Todas ellas, (8), tienen la misma figura poliédrica convexa.

Para nuestro objeto interesa distinguir, sin embargo, solamente dos casos; aquél en que todas las variables auxiliares X_i están acotadas y aquél en que no están todas acotadas.

Diremos que un sistema S_h (m, n) compatible es *finito*, cuando todas las variables auxiliares X_i, de su sistema adjunto, están acotadas, *infinito*, en caso contrario.

Ejemplo 1:
Sean

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 > 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 > 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = X & [1] \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = X_2 & [2] \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = X_3 & [3] \end{cases}$$

un sistema S_2 (3 , 2) y su adjunto.

Su resolvente se compone de una sola ecuación que es

$$(12)\ X_3 + (31)\ X_2 + (23)\ X_1 = (123)\ ,$$

donde

$$(12) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\ ;\quad (31) = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\ ;\quad (23) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\ ,$$

$$(123) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\ .$$

a) Si ninguno de estos cuatro determinantes es nulo y además es

$$Sg.\ (12) = Sg.\ (31) = Sg.\ (23) = Sg.\ (123)\ ,$$

las X_1, X_2, X_3, resultan acotadas; el sistema es acotado y define un triángulo en el plano cuclídeo E_2.

b) Si, en cambio, fuese

$$Sg.\ (12) = Sg\ (31) = Sg\ (123)\ ,$$

pero

$$Sg.\ (23) = -\ Sg.\ (123)\ ;$$

las variables auxiliares X_2 y X_3 no resultarían acotadas. El sistema no es acotado y define una región no acotada de E_2.

Nótese que estas hipótesis son posibles porque en la matriz de los coeficientes del sistema hay efectivamente 3 determinantes independientes de segundo orden, según la fórmula [6.4] :

$$2\ (3 - 2) + 1 = 3\ .$$

Es decir, todos los de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} \right\|\ .$$

Ejemplo 2:

c) Sean ahora

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 > 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 > 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 > 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 > 0 \end{array} \right. ;\quad \left\{ \begin{array}{lll} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = X_1 & & [1] \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = X_2 & & [2] \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = X_3 & & [3] \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = X_4\ , & & [4] \end{array} \right.$$

un sistema S_2 (4,3) y su adjunto, de característica $h = 2$. Supongamos que:

$$(12) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0\ ;$$

es decir que x e y, sean incógnitas principales, y que (12) sea, además, un deter-

minante principal del sistema. El resolvente principal $R_2\ (\delta)$, respecto de este determinante es:

$$\begin{cases} (12)\ X_3 + (31)\ X_2 + (23)\ X_1 = (123) \\ (12)\ X_4 + (41)\ X_2 + (24)\ X_1 = (124)\ . \end{cases}$$

Se tiene por hipótesis que

$$Sg.\ (12) = Sg.\ (123) = Sg.\ (124)\ ,$$

por ser (12) determinante principal del sistema. Si además, resulta

$$Sg.\ (31) = Sg.\ (23) = Sg.\ (123)$$

o bien

$$Sg.\ (41) = Sg.\ (24) = Sg.\ (124)\ ,$$

lo cual siempre es lícito suponer; el sistema tiene todas sus variables auxiliares, X_1, X_2, X_3, X_4, acotadas, pero no es acotado, puesto que sus soluciones dependen, además, de la incógnita arbitraria no principal z. Pero para cada valor asignado a z, resulta, efectivamente, un sistema particular acotado que define en el E_3 euclídeo un cuadrilátero. Es fácil ver que la figura de todos ellos, es decir, la de la región definida por el sistema en E_3, es un prisma cuadrangular no acotado, (sin bases). Este es un ejemplo que ilustra el caso *c*).

Nota: Recuérdese que los determinantes de segundo orden que figuran en el resolvente principal $R_2\ (\delta)$ son los de la matriz de coeficientes:

$$\begin{Vmatrix} a_1\ b_1 \\ a_2\ b_2 \\ a_3\ b_3 \\ a_4\ b_4 \end{Vmatrix}\ .$$

Los determinantes orlados son respectivamente:

$$(123) = \begin{vmatrix} a_1\ b_1\ d_1 \\ a_2\ b_2\ d_2 \\ a_3\ b_3\ d_3 \end{vmatrix}\ ; \qquad (124) = \begin{vmatrix} a_1\ b_1\ d_1 \\ a_2\ b_2\ d_2 \\ a_4\ b_4\ d_4 \end{vmatrix}\ .$$

En esta matriz hay, precisamente, fórmula [6.4]:

$$2\ (4 - 2) + 1 = 5\ ,$$

determinantes independientes de segundo orden. Por eso son lícitas las hipótesis hechas sobre sus signos.

Del resolvente principal de un sistema pueden deducirse fácilmente criterios que caracterizan la *finitud* o *infinitud* de un $S_h\ (m, n)$:

II) *La condición necesaria y suficiente para que un* $S_h\ (m, n)$ *compatible sea finito es que admita un resolvente principal propio* $R_h\ (\delta)$ *y que no exista en la matriz de* $R_h\ (\delta)$ *ninguna columna con elementos*

todos nulos o de signos opuestos al signo del determinante principal δ.

En efecto, la condición es necesaria. En primer lugar no puede tener resolventes impropios (4, *a*), puesto que, en este caso, siendo todas las variables auxiliares independientes entre sí, el sistema no sería finito. Luego debe tener resolventes propios. Estos tienen la forma [7.1]. Si existiese en uno de ellos una misma columna con coeficientes todos nulos o de signos opuestos al de δ, la [7.1] prueba inmediatamente que existiría una variable auxiliar paramétrica no acotada. El sistema no sería finito.

La condición es suficiente. Se deduce inmediatamente de la expresión [7.1] de todo R_h (δ) propio.

De aquí resulta que:

III) *Todo sistema de característica h, igual al número de sus inecuaciones es infinito,* pues carece (4, *a*) de resolventes propios.

IV) *Todo sistema compatible totalmente singular, es infinito, como también todos sus sistemas subordinados compatibles.*

Pues, por ser compatible y totalmente singular, hay en la matriz de sus resolventes principales, R_h (δ), (4, *b*), por lo menos una columna con elementos de signo opuesto al de δ, (4, V). Luego (II), es infinito, pues la correspondiente variable auxiliar paramétrica no resulta acotada. A la misma conclusión se llega si hubiese una columna en $R_h(\delta)$ con elementos todos nulos. Ahora bien, como todo sistema subordinado compatible, pertenece (10, I), a algún resolvente principal del sistema y todos ellos tienen, (7, III), el máximo grado de singularidad, estos sistemas subordinados son también totalmente singulares, luego son también infinitos.

V) *Todo sistema subordinado compatible de un* S_h (m, n) *finito, es también finito,* puesto que todos los sistemas subordinados compatibles de un mismo sistema, pertenecen (10, I), a resolventes principales del sistema.

VI) *Todo sistema irreducible y finito de* $h + 1$ *inecuaciones y de característica* h, *tiene* $h + 1$ *resolventes principales.*

Por ser compatible tiene un resolvente principal (4, VIII), que consta, [4.3], de $h + 1 - h = 1$, ecuación no homogénea, de lo contrario, por ser totalmente singular sería (IV), infinito. Sea esta ecuación:

$$\delta\, X_{h+1} + \alpha_{1h}\, x_h + \ldots + \alpha_{1j}\, X_j + \ldots + \alpha_{11}\, X_1 = \Delta_1 \neq 0\,.$$

Por ser finito, todas las X_j están, (I), acotadas y, como son positivas, se debe tener necesariamente

$$Sg.\ \alpha_{1j} = Sg.\ \Delta_1 .$$
$$(j = 1, 2, \ldots, h) .$$

Como Δ_1 no es otro que el orlado de α_{1j}, está probado que todos éstos son determinantes principales, pues, en virtud de (II), ninguno de ellos puede ser nulo. Luego el sistema tiene $h + 1$ resolventes principales, uno para cada determinante de orden h.

Recíproco:

VII) *Todo sistema no singular de* $h + 1$ *inecuaciones y característica* h *que tiene* $h + 1$ *resolventes principales, es finito.*

El sistema es irreducible porque cualquiera de sus polinomios es principal, (9, II), y es finito (II), porque en la única ecuación de su resolvente principal R_h (δ), tanto el determinante δ como todos los α_{1j} son principales, es decir tienen igual signo que Δ_1, el cual, a su vez, no es nulo.

Notemos finalmente que:

VIII) *Dos sistemas iguales son ambos finitos o ambos infinitos,* porque (8, IV) las trasnformaciones lineales enteras conservan sus resolventes principales.

IX) *Un sistema subordinado compatible* S' *de un* S_h (m, n) *es finito o infinito según que lo sea cualquier sistema fundamental suyo y recíprocamente,* porque tanto el sistema S' como sus sistemas fundamentales tienen, (11, II) los mismos resolventes y, por lo tanto (8), son iguales entre sí.

Obs.: Observemos finalmente que la clasificación de los sistemas en cuanto a su acotación puede hacerse también utilizando su expresión en coordenadas homogéneas [5.1].

Resultan así acotados o no, en el espacio euclídeo E_n contenido en el espacio arguesiano E'_n, según que en este último no contengan o contengan puntos del infinito, es decir soluciones para $z = 0$.

(Continuará)

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Por C. C. D.

Nº 227. — Fabre (René), *Altération du sang dans les intoxications professionnelles.* 52 páginas con algunas figuras. Precio 25 francos. 1935.

Fascículo I de la serie « Exposés de Toxicologie et Hygiène Industrielle », dirigida por el autor, profesor de Toxicología en la Facultad de Farmacia y en el Instituto de Higiene industrial y de Medicina del trabajo de la Facultad de Medicina de París. Farmacéutico de los Hospitales de esa Capital.

Después de recordar la composición de la sangre, y de su papel biológico, el autor estudia los venenos hemáticos y plasmáticos, manteniéndose en el dominio de la toxicología industrial, la que, del punto de vista social presenta, en nuestros días, una importancia cada vez mayor justificando así la necesidad de vigilarlo mucho en salvaguardia de la Higiene y de la Salud pública.

Después de una Introducción, un primer capítulo trae el estudio biológico de la sangre en sus relaciones con la toxicología. Un segundo capítulo trata el papel desempeñado por la sangre en las intoxicaciones profesionales ya respecto de los venenos hemáticos ya de los leucocitarios y plasmáticos. Viene, luego, una bibliografía de las obras de consulta y una tabla analítica de materias.

Nº 235, 237, 249, 250, 256, 257, 262, 263, 292, 293, 294, 306. — Fabre (René), *Leçons de Toxicologie.* Once folletos, así distribuídos:

I. Introducción al estudio de la Toxicología. Generalidades sobre los venenos. 100 páginas con varias tablas y figuras; 15 francos.

II y III. Toxicología de los gases; 12 francos la primera parte; 15 francos la segunda; 60 y 80 páginas respectivamente.

IV. Alcoholes. Anestésicos. Solventes. 78 páginas; 15 francos.

V. Acido cianhídrico, derivados aromáticos. 60 páginas; 12 francos.

VI. Venenos orgánicos diversos. Acido oxálico, veronales y sulfonales. Cafeína y Teobromina. Cantáridas. Digital y Estrofantos. Toxinas e intoxicaciones alimenticias. 60 páginas; 12 francos.

VII. Alcaloides. Generalidades, ptomainas y leucomainas. Drogas con alcaloides líquidos tóxicos. Opio y sus alcaloides. 66 páginas; 12 francos.

VIII. Alcaloides. Soláneos midriáticos. De la Coca, de los Acónitos, de los Strícneos liliáceos. Genalcaloides. 60 páginas; 12 francos.

IX-X-XI. Tóxicos minerales: Generalidades. Arsénico, Antimonio (70 páginas; 12 francos); Mercurio, Bismuto, Plomo, Talio (58 páginas; 12 francos); Cobre, Zinc, Cromo, Níquel, Manganeso, Bario, Radio, Metaloides varios (70 páginas; 15 francos).

Todos los folletos han sido publicados en 1935.

Este trabajo del profesor de Toxicología de la Facultad de Farmacia de París constituye un resumen del Curso de Toxicología que dicta en dicha Facultad. Si bien no abarca pues toda la Toxicología, se encuentran en él las nociones fundamentales de la ciencia de los venenos. Se propone, especialmente, facilitar la tarea a los estudiantes de Farmacia. Pero pueden sacar partido los mismos farmacéuticos ya que encontrarán en estas Lecciones, clasificados y valorizados los numerosos progresos de la técnica física, química o fisiológica aplicada a los problemas de Toxicología. Igualmente pueden ser utilizadas por los que se ocupan de Higiene Industrial, y también por los investigadores que se interesan en cuestiones de Fisiología y Farmacología, pues podrán documentarse en ellas relativamente a la noción del veneno, su modo de acción y el destino de ciertas substancias tóxicas en el organismo.

Un primer capítulo se ocupa de la orientación moderna de la toxicología, de la noción del veneno y de los diversos modos de intoxicaciones; otro indica la manera como penetra el veneno; otro se ocupa de la distribución y localización de los venenos en el organismo; de la manera como actúan los venenos; de las modificaciones que experimentan los venenos en el organismo; de la eliminación de los venenos; de la intoxicación durante la vida fetal. Vienen luego las nociones de toxicidad y el tratamiento de las intoxicaciones.

Tal es el contenido del fascículo I.

Los fascículos II y III se ocupan de la toxicología de los gases anhidrido sulfuroso, cloro, vapores nitrosos, amoníaco, del hidrógeno fosforado y del arseniado, de los arsinos, del óxido y del anhidrido carbónico, del aire confinado, de los hidrocarburos acíclicos gaseosos o volátiles (carburos saturados, etilénicos, acetilénicos, benzeno y homólogos) y del gas de alumbrado.

El fascículo IV trata del sulfuro de carbono, alcohol etílico y metílico, derivados halógenos de los carburos; cloruro y bromuro de metilo y de etilo, cloroformo, tetracloruro de carbono, tetracloroetano, tricloretileno; éter común, nitrocloroformo, sulfuro de etilo diclorado; aldehido fórmico, metacetaldehido, hidrato de cloral, acetona, acetato de amilo.

El V se ocupa del ácido cianhídrico y derivados cianhídricos; fenoles y alquitranes; derivados nitrados y aminos de los carburos aromáticos y de los fenoles; derivados nitrados de los carburos aromáticos; mononitrobenceno, derivados dinitrados del benceno y del tolueno; derivados amíneos de los carburos aromáticos: anilina, metafenileno diamino, parafenileno diamino, paraminofenol; derivados nitrados de los fenoles: dinitro y trinitrofenol.

Y así, los fascículos restantes, de los venenos que indican sus títulos.

Nº 252. — Blaschke (Wilhelm), *Integral geometrie.* 22 páginas. Precio: 7 francos.

Constituye el fascículo I de la serie « Exposés de Geometrie » publicada con la dirección del autor, profesor en la Universidad de Hamburgo. Está escrito en idioma alemán y su contenido es el siguiente: § 1, Die Dichten in der sphärischen Geometrie. § 2, Invarianz beweise. § 3, Die Dichten in der Euklidischen Geometrie. § 4, Die Kinematische Dichte der Sphärischen Geometrie. § 5, Die Kinematische Dichte in E_m. § 6, Umsturzinvarianz der Kinematischen Dichte. § 7, Berich über weitere Untersuchungen.

En un preámbulo, dice el autor W. Blaschke, profesor en la Universidad de Hamburgo, que, por pedido de la casa editora, publicará una serie de trabajos relativos a investigaciones científicas que se han realizado en el seminario de Matemáticas de aquella ciudad; y se complace en el hecho de que en el tema inicial de esos trabajos, hayan colaborado geómetras franceses, ingleses y alemanes. Sólo que, a juicio de algunos de éstos, es la intuición que entra en juego, y para otros, la abstracción. La dificultad consiste en precisar el punto y anuncia que en nada puede, él, contribuir en la resolución de esa controversia.

Nº 253. — Sivadjian (J.), *Les Fièvres et les Médicaments Antithermiques.* 98 páginas; 32 gráficos. 1935. Precio: 15 francos.

Fascículo 1º de la serie « Exposés de Chimie Thérapeutique » publicada con la dirección del miembro de la Academia de Medicina, jefe del servicio del Instituto Pasteur, Dr. Ernesto Fourneau. El autor es doctor en ciencias.

Después de una introducción en la que apunta, entre otras cosas, la complejidad de la cuestión de establecer una comparación neta entre los diversos antipiréticos y de formarse una idea de su valor real, entra en materia ocupándose, sucesivamente, de la fiebre experimental, de los agentes químicos hipertermisantes, de la elección del animal, de las acciones de los ácidos amíneo sobre la temperatura, de los tóxicos del simpático y temperatura, de la acción de algunos fenoxialcoilaminas substituídos, sobre la temperatura, de la de las substancias antipiréticas sobre el metabolismo, de la acción sobre el sistema nervioso, de la discusión de los resultados. Llega a la conclusión que existen antipiréticos puramente periféricos, y otros de naturaleza netamente central; que, dadas las modalidades diversas de los hipertermios y de la termólisis, el estudio completo de un antipirético exige, en primer lugar, ensayos previos sobre la temperatura del animal en estado normal y en estado de fiebre; y luego, mediante medidas de intercambios, la determinación de la parte de cada factor de la termoregulación en el efecto antipirético observado.

Una larga noticia bibliográfica termina el trabajo.

Nº 267. — Freundlich (H.), *Thixotropy.* 50 páginas con algunos gráficos. Precio: 12 francos; 1935.

Fascículo 1 de la serie « The Collodail State » dirigida por F. G. Donnan, profesor de la Universidad de Londres.

El autor, profesor en la « University College » de Londres, después de

una Introducción, desarroila el tema en cuatro capítulos. En aquélla explica el significado del vocablo *Thixotropy;* en éstos indica las causas probables de dicha Thixotropia y su existencia en geología, biología e industria. Una abundante bibliografía termina el folleto.

« La tixotropía es un fenómeno que se produce en ciertos medios coloidales líquidos y susceptibles, con el reposo, de transformarse en una masa elástica más o menos rígida según la naturaleza y la cantidad de la materia coloidal contenida en ellos. Inversamente, si ese medio, transformado así en jalea elástica, es agitado fuertemente, vuelve nuevamente a ser líquido como antes y un nuevo reposo lo transforma en jalea y así indefinidamente. Aun cuando la existencia de esos hechos se conoce desde mucho tiempo atrás solo hace poco se ha emprendido el estudio de ese fenómeno asaz curioso y cuyas causas no son aun conocidas con certeza. El cambio de sólido a líquido se produce por desplazamiento las unas respecto de las otras de las partes constitutivas de la masa; y por eso Peterfi ha dado el fenómeno el nombre de tixotropía, del griego *thixio* tocar y *tropein* cambiar » (Paul Bert, Larousse Mensuel, nº 350).

Nº 268. —Dubridge (Lee A.), *New Theories of the Photoelectric Effect.* 60 páginas con algunas figuras. Precio: 12 francos; 1935.
Folleto 1º de la serie « L'Effet Thermique et la Photoélectricité » dirigida por K. K. Darrow.

El autor es profesor de física en la Universidad de Rochester; después de una Introducción explicativa del tema, expone éste en la siguiente forma: La Teoría de Sommerfeld; Distribución espectral: teoría, pruebas experimentales y efectos térmicos; Distribución energética de los fotoelectrones; energías normales y totales, pruebas experimentales. Al final trae conclusiones y referencias relativas al tema.

Nº 269. — Trillat (Jean J.), *La Diffraction des Électrons dans ses applications.* 62 páginas con 13 figuras en el texto y 5 láminas fuera del mismo. Precio: 18 francos. 1935.

Fascículo V de la serie « Exposés de Physique Atomique Expérimentale » dirigida por Maurice de Broglie.

En otro fascículo (el nº 110) de esta colección, el profesor Trillat de la Facultad de Ciencias de Besançon indicó cómo los fenómenos de difracción electrónica han traído una decisiva prueba favorable a la teoría de la Mecánica Ondulatoria.

Esos mismos fenómenos han sido utilizados casi inmediatamente como nuevo método de investigación de la Materia. El presente fascículo se ocupa solo de tales aplicaciones.

El trabajo viene dividido en cinco capítulos precedidos de una Introducción y seguidos de una bibliografía.

La conclusión es que la difracción de los electrones ha dado lugar en los últimos años a numerosísimos resultados experimentales y que ese nuevo método de investigación ha sido fecundo tanto en dominios físicos como en químicos.

Esa difracción ha mostrado que el movimiento de los proyectiles corpusculares podía preverse aplicándoles leyes hasta entonces reservadas a la óptica, abriendo así un nuevo campo al estudio de las estructuras atómicas y moleculares.

El autor presenta los hechos de que se ocupa en forma resumida y simple.

Nº 270. — Godeaux (Lucien), *Les Involutions Cycliques appartenant à une Surface Algébrique.* 45 páginas. Precio: 12 francos. 1935.

Fascículo VII de la serie « Exposés de Géométrie », dirigida por E. Cartan.

El autor dió una conferencia en la Universidad de Poitiers en mayo 1934, relativamente al tema. En este fascículo desarrolla dicha conferencia, y su exposición está completada con una lista copiosa de los trabajos consagrados a las correspondencias entre dos superficies algébricas; además indica las obras donde el lector puede hallar la exposición de las teorías de la geometría algébrica utilizada en el folleto.

En una *Introducción,* rememora los trabajos realizados por E. Picard sobre las superficies cuyos puntos tienen coordenadas expresadas con funciones abelianas de dos parámetros. Recuerda también los estudios de Humbert, de Enriques, Severi, Bagnera y De Franchis.

Dadas dos superficies de género *uno,* las que, por medio de transformaciones birracionales pueden siempre reducirse a superficies de orden $2\pi - 2$, con secciones hiperplanas de género π, pertenecientes a un espacio lineal de π dimensiones (para $\pi = 4$ se obtienen superficies de 4º orden), las correspondencias en ellas conducen a involuciones con un número finito de puntos unidos, y manifiesta Godeaux que son ellas las que, por consejo de Enriques, ha estudiado.

Nº 271. — Kostitzin (V. A.), *Évolution de l'Atmosphère. Circulation organique. Époques glaciaires.* 46 páginas. Precio: 12 francos. 1935.

Fascículo VIII de la serie « Exposés de Biométrie et de Statique Biologique » dirigida por Georges Teissier, subdirector de la Estación Biológica de Roscoff.

El problema tratado en este trabajo ha sido planteado varias veces por los químicos y los mineralogistas. El autor lo trata del punto de vista matemático. Apoyándose en algunos postulados empíricos es posible construir ecuaciones diferenciales y deducir de ellas conclusiones verificables por la experiencia, ya enseguida, ya en un futuro más o menos alejado.

Es lo que el autor manifiesta en el prefacio. Expone luego la cuestión tratando sucesivamente lo relativo a la constitución de la atmósfera y el papel desempeñado por la materia orgánica; las ecuaciones y sus soluciones; el origen de las épocas glaciales, y el porvenir de la atmósfera y de la vida.

Una bibliografía termina el estudio.

El autor manifiesta que la duración de la vida del conjnto de los seres vivientes está asegurada por un tiempo indefinido si no ocurre una catástrofe cósmica que destruya bruscamente a la Tierra. La desaparición misma de la atmósfera no puede ser considerada como final de la vida.

Nº 272. — Bussit (Jacques), *Recherches analytiques sur l'Arginine et l'Histidine.* 100 páginas. Precio: 20 francos. 1935.

Fascículo III de la serie « Exposés de Chimie Analytique (chimie organique et *Biologique* », dirigida por M. Nicloux, profesor de la Facultad de Medicina de Estrasburgo. El autor es doctor en Farmacia.

La arginina y la histidina son ácidos diamíneos o bases exónicas. Parecen indispensables al crecimiento. Por lo demás, la evolución del tenor en ácidos diamíneos de los proteidos de un organismo vivo, animal o vegetal, en el curso de su desarrollo y particularmente en el momento de la reproducción y del nacimiento, es tema importante para los estudios fisiológicos. Esas dos sustancias no son extraídas por el alcohol butílico, salvo en el punto isoeléctrico y aun así su extracción completa es muy larga. El autor hace un estudio sucesivamente de los métodos de fraccionamiento de los ácidos amíneos, de los del dosaje de la arginina y de la histidina, de la precipitación de una y otra al estado de sal de plata. De la separación de una y otra con compuestos mercúricos, de la extracción de los ácidos amíneos con el alcohol butílico. Formula conclusiones y trae una larga bibliografía del tema tratado.

Nº 275. — Mund (W.), *L'Action chimique des Rayons Alpha en phase gazeuse.* 56 páginas. Precio: 15 francos. 1935.

Fascículo VI de la serie « Exposés de Chimie Générale et Minérale », dirigida por Paul Pascal, de la Sorbona. El autor es profesor de la Universidad de Lovaina, y el folleto que nos ocupa es continuación de otros tres publicados por él, sobre el mismo tema, en 1924, 1927 y 1930. Se limita, ahora, a discutir cuestiones puestas sobre el tapete. Trata sucesivamente: Los elementos radioactivos empleados como fuentes de los rayos α en las investigaciones de radioquímica; la energía de los rayos α; el alcance de las partículas α; la ionisación a lo largo de una trayectoria de partícula α; rayos δ, ionisación segundaria y recombinación; cálculo de la ionisación total producida en un gas irradiado por las partículas α en las condiciones de las experiencias radioquímicas; relación general entre la ionisación y los efectos químicos; la distinción entre las reacciones primarias y secundarias; el papel de la afinidad en las reacciones radioquímicas; dependencia del rendimiento cónico respecto de los diversos factores; las acciones de pared.

El autor termina con algunas consideraciones teóricas; formula conclusiones y trae una bibliografía del tema.

LOS PROBLEMAS DEL HEMO Y DE LA CLORÓFILA

Por ENRIQUE V. ZAPPI

Introducción

El conocimiento de la estructura química y de las relaciones que existen entre el colorante verde de las plantas, la *clorófila*, y el colorante rojo de la sangre de los vertebrados, el *hemo*, alcanzado en estos últimos tiempos, constituye la solución de un apasionante probl ma debatido durante muchos años entre los hombres de ciencia.

Una cantidad de observaciones y de hechos experimentales parecían afirmar que ambos pigmentos deberían hallarse constituídos por las mismas unidades químicas fundamentales, diferenciadas por la existencia de *magnesio* en la clorófila y de *hierro* en el hemo.

No obstante la enorme masa de trabajo acumulado, de habilidad experimental ejercitada y de talento desplegado por muchos investigadores, el enigma se mantenía insoluble hasta que Hans Fischer, de Munich, halló la solución, descubriendo que el núcleo de la *porfina* constituye el esqueleto común de los colorantes de la sangre y de las hojas.

Mediante brillantes experimentos, llevados con una lógica admirable, llegó a efectuar la síntesis de la hemina, del hemo y de substancias muy próximas a la clorófila, lo cual le valió el premio Nobel de 1930.

Tales investigaciones han adquirido después una verdadera trascendencia filosófica al comprobarse que los diversos *pigmentos respiratorios*, distribuídos en toda la escala animal y vegetal son complejos metálicos de la porfina, no solo con el hierro o con el magnesio como en el caso del hemo o de la clorófila, sino también con otros metales: *cobre*, *vanadio* o *manganeso*.

De donde viene a resultar que el núcleo común a todos esos colorantes, *la porfina, es el grupo esencial elegido para la función biológica de la respiración en toda la Naturaleza animada.*

La sangre y la resina verde de las plantas

Posiblemente no existe substancia alguna que haya sido más estudiada que la sangre, ese «jugo muy particular» que decía Mefistófeles.

Desde los tiempos más remotos los médicos, los químicos y los fisiólogos han tratado de determinar su naturaleza y de establecer su constitución y sus propiedades.

Ya en las postrimerías del siglo XVIII se reconoció que la sangre contenía una materia colorante que le es propia, designada con el nombre de *hematosina*, un complejo mal definido de albúminas y de una verdadera especie química, la *hematina*, que fué aislada en 1826 por Tiedemann y Gmelin.

En realidad la materia colorante de la sangre es una albúmina coloreada, un *cromo-proteido*, que se llama *hemoglobina*, descubierta por Hoppe-Seyler en 1862.

Tiene a su cargo la función respiratoria en los animales de sangre caliente, pues en contacto con el aire pulmonar se transforma en *oxihemoglobina* que arrastrada por el torrente circulatorio vá cediendo su oxígeno a los distintos órganos y regenera nuevamente la hemoglobina, que vuelve a oxidarse en los pulmones y así sucesivamente.

Fuera del organismo la hemoglobina fija el oxígeno atmosférico en una forma más estable y produce la *metahemoglobina*, que a diferencia de la oxihemoglobina no puede ya regenerar la hemoglobina.

La hemoglobina, en su carácter de *proteina* conjugada se halla formada por un *grupo protéico*, la *globina* y por un *grupo prostético*, que se llamó el *hemocromógeno* (Hoppe-Seyler, 1870).

En 1925, Anson y Mirsky, de Cambridge, demostraron que el hemocromógeno es también una proteina conjugada, de un peso molecular menor que la hemoglobina, pero formado idénticamente por globina y por el verdadero grupo prostético, un complejo ferroso común a todos los derivados de la hemoglobina, que denominaron: *hemo*.

El mecanismo químico del fenómeno respiratorio se funda en la capacidad que tiene el hierro del hemo de oxidarse, pasando de ferroso a férrico, y de reducirse nuevamente a ferroso cediendo su oxígeno. En la oxihemoglobina se halla contenido un peróxido inestable del hemo; en la metahemoglobina un óxido estable. De los principales compuestos conocidos, la hemaïna es un óxido hidratado y la hemina un cloruro de hemo.

$C_{34}H_{32}O_4N_4Fe$ — Hemo

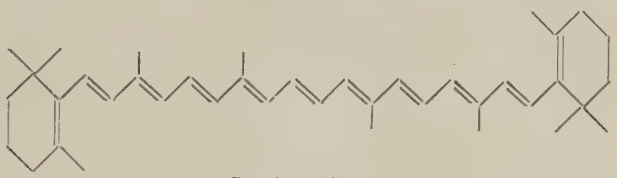
$C_{34}H_{32}O_4N_4Fe - OH$ — Hematina

$C_{34}H_{32}O_4N_4FeCl$ — Hemina

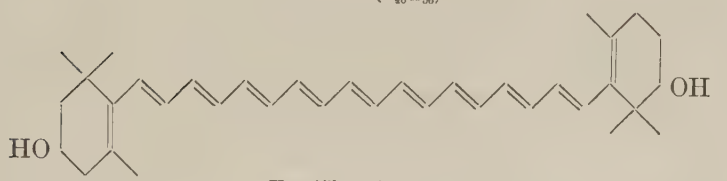
La historia de la clorófila es más moderna. En 1818, Pelletier y Caventou extrajeron de las hojas y tallos de diversas plantas herbáceas, por medio del alcohol, una substancia verde obscura que denominaron por su aspecto *resina verde de las plantas*, y luego *clorófila*.

Estudios posteriores demostraron que la clorófila bruta es una mezcla muy compleja, separándose de ella además de dos ceras incoloras, un colorante verde y otro amarillo.

Este último se desdobló más tarde en otros dos: *carotina* y *xantófila*, substancias íntimamente relacionadas con la *vitamina A* y a las cuales Karrer (1933) atribuye la estructura siguiente (*)



Carotina ($C_{40}H_{56}$)



Xantófila ($C_{40}H_{56}O_2$)

La composición química y la fórmula molecular de la clorófila fueron discutidas durante largo tiempo antes de que pudiera llegarse a un acuerdo al respecto.

Así como la existencia del hierro en la hemoglobina fué establecida con certeza y aceptada desde muy temprano, en la clorófila, en cambio, la presencia de magnesio fué siempre controvertida hasta que en 1906 los trabajos de Willstätter la hicieron admitir definitivamente.

Aún en 1908, Stoklasa y otros químicos, sostenían que en la clorófila existía fósforo bajo forma de ácido glicerofosfórico y que ella era en realidad una verdadera lecitina.

(*) Para interpretar estos esquemas hay que tener presente que en cada ángulo de las figuras o en cada extremo de línea existe un átomo de carbono cuyas valencias libres deben ser saturadas por átomos de hidrógeno o por diversos grupos funcionales.

Finalmente, en 1910, Willstätter demostró que la clorófila de las plantas no es única, sino que se halla constituída por una mezcla de otras dos de composición química muy vecina y las denominó *clorófila a* y *clorófila b:*

$C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$ — Clorófila A

$C_{55}H_{70}O_6N_4Mg$ — Clorófila B

cuyas fórmulas moleculares se consideran exactas.

En cambio, lo que mejor se estableció desde los primeros estudios, fué el rol biológico que desempeña la clorófila en la asimilación del carbono y en la respiración de los vegetales.

La clorófila de las hojas, bajo la influencia de los rayos solares, descompone el ácido carbónico eliminando un volumen igual de oxígeno y formando los hidratos de carbono: *azúcares*, *almidones* y *celulosa* que necesitan las plantas para u sustento.

$$n\ CO_2 + n\ H_{20} \rightleftarrows n\ CO_3H_2 \xrightarrow[\text{clorófila}]{\text{luz}} n\ O_2 + (CH_2O)_n$$

La *función clorofiliana* es pues totalmente opuesta a la de la respiración en los animales. Estos absorben el oxígeno del aire y emiten ácido carbónico en tanto que los vegetales toman el ácido carbónico del aire viciado por los animales y devuelven oxígeno.

A pesar de esto la oposición es más aparente que real y en el fondo subsiste la analogía entre ambos pigmentos respiratorios de animales y vegetales, pues el mecanismo de su acción es idéntico: ambos ejerejercitan su función tomando oxígeno; el hemo del aire y la clorófila del ácido carbónico.

Tal parecido en la función biológica de dichos colorantes hizo surgir tempranamente la idea de que se hallaran íntimamente relacionados entre sí.

Ya en el año 1852, Verdeil creyó demostrarlo al obtener, por la acción del percloruro de hierro sobre la clorófila, un producto muy parecido a la hemina y que probablemente era un complejo férrico de la feofitina.

La confirmación de las hipótesis sobre el estrecho parentesco que debía existir entre los colorantes de la sangre y de las plantas, halló sus bases realmente sólidas hacia el año de 1900, por obra de Nencki, Piloty, Küster, Willstätter y una legión de colaboradores, que demostraron la identidad de los productos obtenidos al demoler las moléculas de la clorófila y de la hemina.

La hemina y la clorófila poseén un núcleo común

Los métodos empleados para lograr una degradación sistemática de tan complicadas moléculas, fueron los siguientes:

1°. La reducción enérgica por medio del ácido yodhídrico y del yoduro de fosfonio, aplicada por Nencki Piloty y Küster, desde 1901.

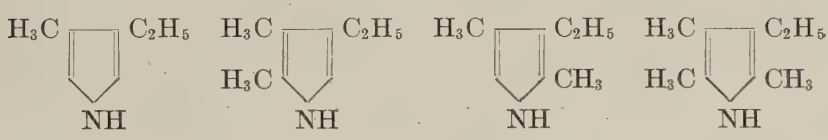
2°. La oxidación fuerte por medio de la mezcla crómica, empleada por Küster en 1912.

3°. La hidrólisis, o sea el desdoblamiento por acción del agua, en diversos medios ácidos, alcalinos, etc., usada especialmente por Willstätter y sus colaboradores, desde el año 1906.

La reducción enérgica de los colorantes de la sangre, así como de la clorófila o de la bilis:

$C_{34}H_{32}O_4N_4Fe$	$C_{34}H_{33}O_5N_4Fe$	$C_{34}H_{32}O_4N_4FeCl$
Hemo	Hematina	Hemina
$C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$	$C_{55}H_{70}O_6N_4Mg$	$C_{33}H_{36}O_6N_4$
Clorófila *a*	Clorófila *b*	Bilirubina

por medio del ácido yohídrico y del yoduro de fosfonio, conduce a los siguientes pirroles substituídos:

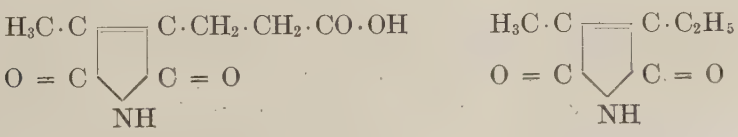


Opsopirrol	*Hemopirrol*	*Criptopirrol*	*Fitopirrol*
3-metil-4-etil-pirrol	2-3-dimetil-4-etil-pirrol	2-4-dimetil-3-etil-pirrol	2-3-5-trimetil-4-etil-pirrol

(Vérse el cuadro *A* de la Lámina)

Si la reducción no es muy avanzada se obtienen los ácidos *opso-*, *hemo-*, *cripto-* y *filo-pirrol carbónicos*, que llevan un resto de *ácido propiónico*, $-CH_2-CH_2-CO\cdot OH$ en lugar del grupo *etilo* de los pirroles respectivos.

La oxidación, por medio del bicromato de potasio y del ácido sulfúrico, produce especialmente el *ácido hematínico* y la *imida metil-etil-maléica:*



Acido hematínico — *Imida metil-etil-maléica*

(Véase el cuadro *B* de la Lámina)

La acción suave de los ácidos sobre el hemo, sobre la hematina o la hemina:

$$C_{20}H_4N_4\begin{cases}Fe\\(CH_3)_4\\(CH=CH_2)_2\\(CH_2\cdot CH_2\cdot COOH)_2\end{cases}$$

Hemo

$$C_{20}H_4N_4\begin{cases}FeOH\\(CH_3)_4\\(CH=CH_2)_2\\(CH_2\,.\,CH_2\,.\,COOH)_2\end{cases}$$

Hematina

$$C_{20}H_4N_4\begin{cases}FeCl\\(CH_3)_4\\(CH=CH_2)_2\\(CH_2\cdot CH_2\cdot COOH)_2\end{cases}$$

Hemina

les hace perder respectivamente, Fe, Fe(OH) y FeCl, que son reemplazados por 2 H, dando la *protoporfirina* (*) que reducida produce la *mesoporfirina*. Esta sometida a la acción del calor pierde dos moléculas de anhídrido carbónico y dá la *meso-etioporfirina*. (Véase el cuadro *C* de la Lámina).

Es interesante recordar aquí que la primera porfirina fué preparada en el año 1880 por Hoppe-Seyler haciendo actuar sobre la hematina una mezcla hirviente de ácidos clorhídrico y acético concentrados. Designó con el nombre de *hematoporfirina* al producto obtenido. Este es un derivado de hidratación de los dos grupos etilidénicos del hemo, lo cual se comprueba porque reducido pierde dos oxhidrilos, que son reemplazados por hidrógeno, dando la mesoporfirina. (Véase el cuadro *C* de la Lámina).

La clorófila sometida a la acción del hidrógeno naciente en medio ácido, sufre una serie de transformaciones complejas produciendo *rodoporfirina* y por decarboxilación, sucesivamente, *pirroporfirina* y *pirro-etioporfirina*. (Véase cuadro *D*, «reducción ácida», de la Lámina).

Estas dos últimas porfirinas se hallan íntimamente relacionadas con las porfirinas de la hemoglobina. Observando las fórmulas del Cuadro *C*, vemos que la mesoporfirina y la meso-etioporfirina tienen respec-

(*) En lugar de presentar simplemente las fórmulas moleculares, que no dicen nada sobre la constitución de las substancias nombradas, he preferido dar fórmulas parciales de estructura, exhibiendo junto al núcleo de constitución indeterminada aún, en ese momento, los grupos funcionales de existencia más tempranamente admitida, y que demuestran como esas series de transformaciones no afectan para nada al núcleo central que permanece invariado.

tivamente un resto de ácido propiónico y un radical etilo, más que la pirroporfirina y que la pirro-etioporfirina.

Sintéticamente se ha logrado pasar de una serie a la otra efectuando los cambios indicados por las flechas horizontales, es decir quitando un resto de ácido propiónico a la mesoporfirina se obtuvo la pirroporfirina y añadiendo un resto etilo a la pirro-etioporfirina se pasó a la meso-etioporfirina.

Con esto quedó definitivamente comprobado que el núcleo de la pirro-etioporfirina es común a la clorófila y al hemo.

La descomposición de la clorófila con ácido clorhídrico concentrado provoca una hidrólisis brusca acompañada por desprendimiento de anhídrido carbónico y produce un cuerpo llamado *filoeritrina* (16) por el químico Marchlewski que la descubrió en 1903.

Por degradación se transforma sucesivamente en *filoporfirina* y *filo-etioporfirina.*

Según puede observarse por comparación de las fórmulas respectivas la filo-etioporfirina es un homólogo superior de la pirro-etioporfirina.

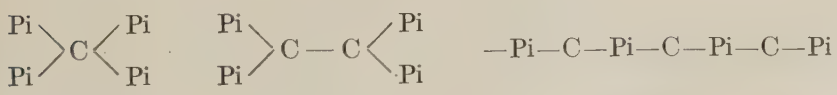
Este hecho pasó desapercibido para Willstätter que consideró la mezcla de ambos productos, extremos de hidrogenación de la clorófila, como una sola especie química que denominó «*etioporfirina*» idéntica a la «*etioporfirina*» obtenida por la hidrogenación de la hemina (actual meso-etioporfirina).

Así fué llevado a considerar que su «etioporfirina» constituía el núcleo común de los pigmentos de la sangre y de la clorófila.

Sometidas a una reducción enérgica la meso-, la pirro- y la filo-etioporfirinas, así como la «etioporfirina» de Willstätter, se desdoblaron en la mezcla de los metil-etil-pirroles citados más arriba (ver cuadro A de la Lámina) demostrando que todas ellas se hallaban constituidas pr la unión de cuatro núcleos pirrólicos.

Efectuadas estas constataciones, surgieron inmediatamente las hipótesis destinadas a resolver cual era la forma de unión de los núcleos pirrólicos en las porfirinas.

Las estructuras preferidas fueron las del *tetrapirril-metano* del *tetrapirril-etano* y una forma alternada de *pirrol-carbono*; de acuerdo a estos esquemas:

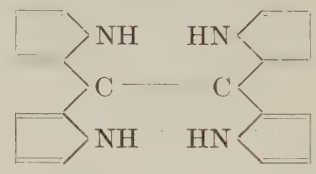


tetrapirril-metano tetrapirril-etano Mesobilirubina

Pi = núcleo pirrólico

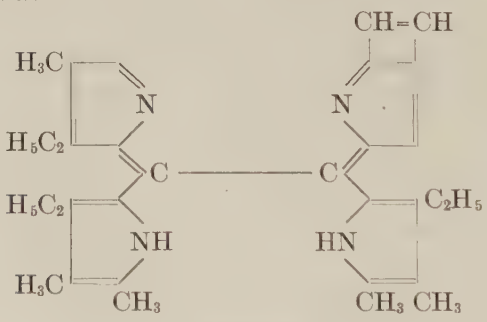
El tetrapirril-metano no es conocido. El tetrapirril-etano fué preparado por Willstätter mediante la reacción del glioxal sobre trimetil-pirrol y produce isómeros coloreados. La forma alternada de pirrol y carbono fué hallada en la cadena de la mesobilirubina, un colorante de la bilis.

Willstätter fundándose en sus síntesis: en la facilidad con que el tetrapirril-etano da productos coloreados; en la existencia de leuco derivados incoloros de la clorófila y de la hemina, obtenibles por reducción, como en el caso del índigo blanco, optó para desarrollar la estructura de su «etioporfirina» por una fórmula del tipo indigoide derivada del *tetrapirril-etileno*

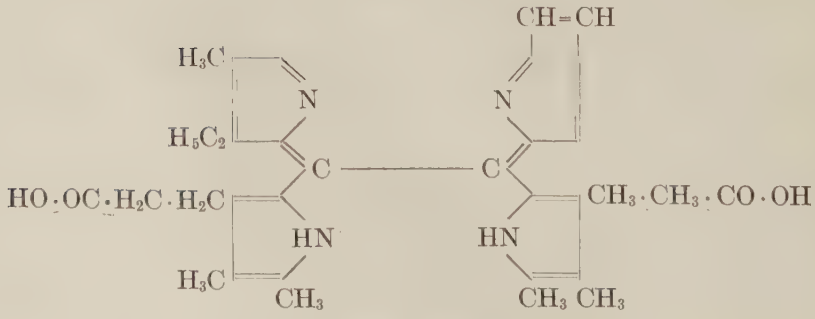


Tetrapirril-etileno

Hizo derivar de esta fórmula la correspondiente a la «etioporfirina» y a la *hemoporfirina*, un producto intermedio de la reducción de la hematoporfirina:



Etioporfirina

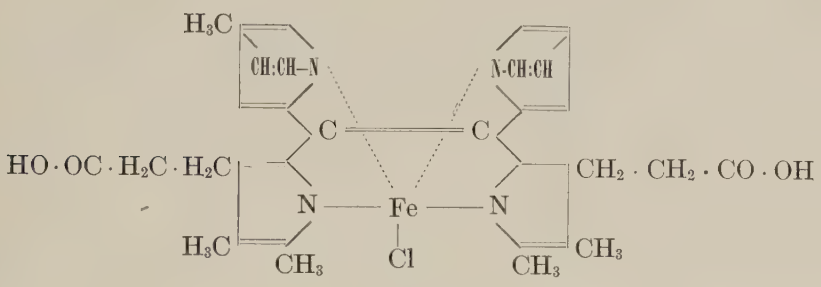


Hemoporfirina

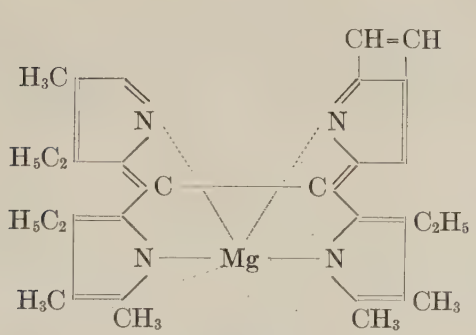
Según *Willstätter* (1913)

Basándose en los trabajos de Werner y Tschugaeff sobre los compuestos de coordinación de las diaminas, considera que el Mg de la clorófila y el Fe de la hemina se hallan combinados como complejos de este tipo:

y propuso para la hemina la fórmula siguiente:



Hemina



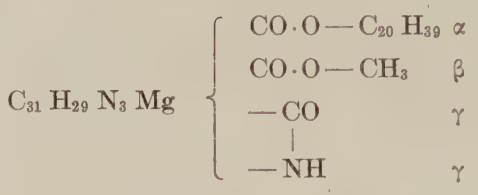
Etiofilina

Según Willstätter (1913)

Haciendo actuar el reactivo de Grignard sobre la «etioporfirina» obtuvo un complejo magnesiano, que denominó *etiofilina* y que consideró como un derivado muy cercano a la clorófila.

Con respecto a la constitución de la clorófila, la fórmula más avanzada a que llegó Willstätter consistió en reconocer agrupadas sobre el núcleo de la etiofilina dos carboxilos, esterificados por un metilo y

por un fitilo, y una función lactona fácilmente hidrolizable y susceptible de reformarse en otra posición, condición necesaria esta última, para explicar el fenómeno de las fases coloreadas descubierto por él, y del cual nos ocuparemos más adelante.

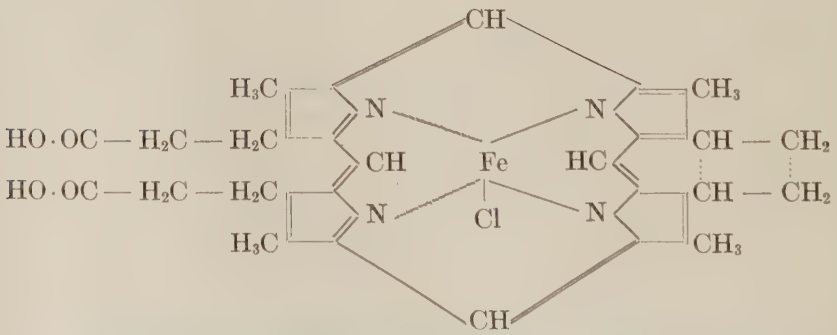


Clorófila (a) según *Willstätter* (1912)

Por su parte Küster volviendo nuevamente a la estructura de la «etioporfirina» advirtió que aún era posible otra manera de combinar los cuatro núcleos pirrólicos y los cuatro carbonos, a saber: adoptando una estructura cíclica sobre la cual construyó su fórmula de la hemina,

Ciclo-tetrapirril-metano

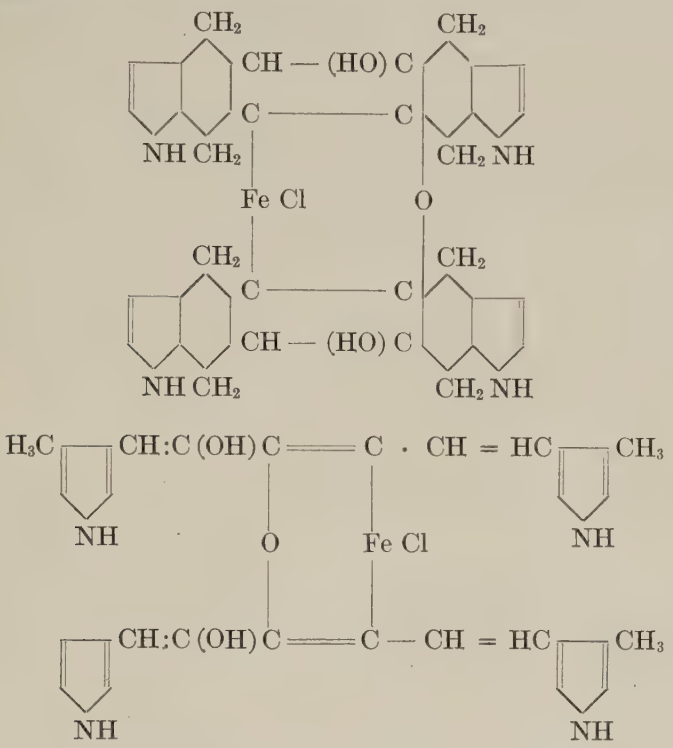
presentada en 1912, y cuyo verdadero valor solo fué reconocido por Hans Fiscer veinte años más tarde, al hallarla prácticamente exacta.



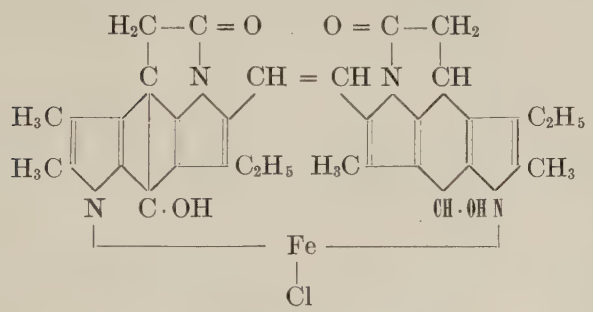
Hemina según Küster (1912)

Las fórmulas de Nencki y Zaleski (1901) y la de Piloty (1911), que damos más abajo, solo presentan un interés histórico por ser las

primeras propuestas para explicar la tan complicada estructura de la hemina:



Fórmulas de la *Hemina* según Nencki y Zaleski (1901)



Hemina según Piloty (1911)

LA HIDROLISIS DE LA CLOROFILA

Diversos procedimientos de hidrólisis aplicados a la clorófila, permitieron a Willstatter y a sus discípulos obtener numerosos derivados y llegar a un conocimiento bastante exacto sobre la constitución, estructura y transformaciones de dicha substancia.

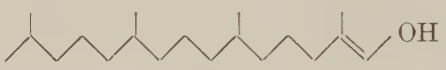
La *clorófila a*, la única que nos ocupará por ahora, sometida a la acción de los álcalis diluídos, se desdobla en *clorofilina a*, que es el complejo magnesiano de un ácido bibásico, en *alcohol metílico* y en *fitol*:

$$\underset{\text{Clorófila } a}{C_{55}H_{72}O_5N_4Mg} + 2H_2O \xrightarrow{\text{álcalis}} \underset{\text{Clorófilina } a}{C_{32}H_{30}ON_4Mg}\begin{cases}COOH\\COOH\end{cases} +$$

$$+ CH_3OH + \underset{\text{Fitol}}{C_{20}H_{39}OH}$$

(ver cuadro D, «álcalis», de la Lámina)

El fitol es un alcohol sesquiterpénico, relacionado con los carotinoides y cuya estructura responde al siguiente esquema:



Fitol ($C_{20}H_{39}OH$)

Bajo la acción de la *clorofilasa*, una diastasa que existe en las hojas verdes de todas las plantas, la clorófila es hidrolizada parcialmente perdiendo el resto fitilo y produciendo *clorofilido a*, que es el éster metílico ácido de la clorofilina a.

Cuando la clorofilasa actúa sobre la clorófila disuelta en alcohol metílico o etílico se forman respectivamente los ésteres neutros metílicos o etílicos del clorofilido *a*, que se denominan metil- o etil-clorofilidos *a*.

$$\underset{\text{Metil-clorofilido-}a}{C_{32}H_{30}ON_4Mg}\begin{cases}CO\cdot OCH_3\\CO\cdot OCH_3\end{cases} \qquad \underset{\text{Etil-clorofilido-}a}{C_{32}H_{30}ON_4Mg}\begin{cases}CO\cdot OCH_3\\CO\cdot OC_2H_5\end{cases}$$

Los álcalis saponifican a todos los clorofilidos, transformándolos en clorofilina a.

(ver cuadro D, «clorofila», de la Lámina)

Por un tratamiento alcalino más enérgico tanto el clorofilido a, como la clorofilina a, pierden su átomo de magnesio y se transforman respectivamente en *feoforbido a* y en *clorina e*.

La acción del ácido clorhídrico diluído sobre la clorófila, le elimina inmediatamente el magnesio y produce la *feofitina a*, que luego se

hidroliza completamente por el mismo reactivo y se transforma en el *feoforbido a.*

Este, sometido durante algunos segundos a la acción del metilato de potasio, produce la clorina e.

(Véase cuadro D, — Mg, de la Lámina).

La hidrólisis sucesiva de la clorina e, condujo al través de una serie complicada de porfirinas, que estudiaremos más adelante, a la *rodo-* y a su isómero la *verdo-porfirina*, que por decarboxilación dan lugar a la formación de las *pirro* y pirrro-etio-porfirinas, tan íntimamente relacionadas con las porfirinas del hemo, según explicamos anteriormente (ver pág. 134)

Sobre la obtención de la filoeritrina (ver pág. 135)

La porfina y las porfirinas

Tal era el estado de los conocimientos, cuando se presenta Hans Fischer en el campo de la investigación de los colorantes de la bilis y de la sangre.

Nacido en 1881 y discípulo de Emilio Fischer, comienza sus trabajos en 1911 con una contribución al conocimiento de los colorantes de la bilis, retomando las anteriores investigaciones de Nencki y demostrando que su «*hemopirrol*» no era puro.

De allí es llevado a estudiar metódicamente la constitución y síntesis de los pirroles substituídos y sus relaciones con las porfirinas obtenidas de la bilis, de la sangre y de la clorófila, terminando por enfrentarse directamente con el problema de la estructura de dichos colorantes y resolviéndolo brillantemente, a través de una masa enorme de trabajo experimental.

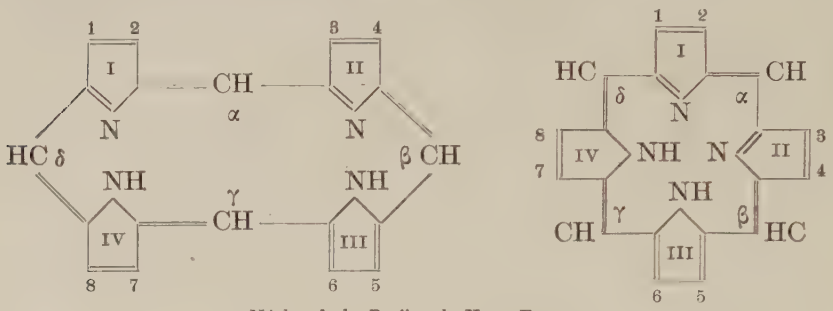
La idea conductora de sus investigaciones fué que la fórmula de la hemina propuesta por Küster en 1912 (ver pág. 13) era fundamentalmente exacta. Hans Fischer percibió que ella contenía la agrupación molecular que presentía común de todos los colorantes a cuyo estudio se había consagrado.

Del mismo modo como su maestro Emilio Fischer inventara el núcleo hipotético de la *purina* que necesitaba para explicar y desarrollar la química del *ácido úrico* y de sus derivados, Hans Fischer extrajo de la fórmula de Küster el ciclo de pirrol-carbono lo designó con el nombre de «*porfina*» y lo tomó como base de todo su razonamiento.

La *porfina* es pues un compuesto hipotético * formado por la unión

* Recientemente Fischer y Gleim, realizaron la síntesis de la porfina, condensando el α-pirrol-aldehido con ácido fórmico (Ann., 1935, t. 521; p. 157).

alternada de cuatro núcleos pirrólicos con cuatro carbonos metínicos, que se representa de varias maneras, dos de las cuales son:



Núcleo de la *Porfina* de Hans Fischer

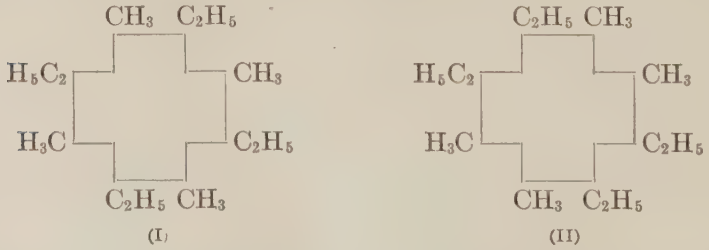
Ya con la adopción del núcleo de la porfina introdujo una sistematización de la nomenclatura caprichosa que hasta entonces se empleaba.

Los derivados de la porfina son las *porfirinas* (del griego *porfyr* = púrpura). Substituídas por alquilos, constituyen las *porfirinas básicas*; por restos ácidos: las *porfirinas ácidas*. Si tienen grupos metínicos libres, se denominan las *deuteroporfirinas*. Por introducción de Fe dan las *heminas* y por la del Mg, producen las *filinas*.

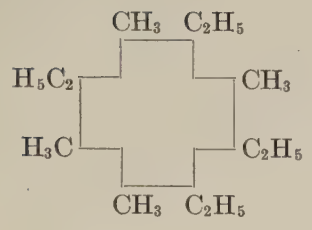
Las *tetrametil-tetraetil-porfirinas*, constituyen las *etioporfirinas*, productos últimos de la reducción de la hemina de la sangre (10) y de varias porfirinas patclógicas, como ser la *copro-* y la *uro-porfirina* (3-4).*

Así planteado el problema, la primera preocupación de Hans Fischer fué la de establecer cuantas etioporfirinas eran teóricamente posibles.

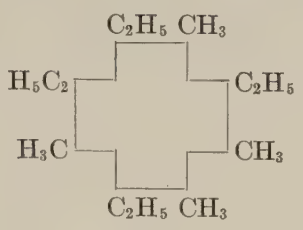
Representando esquemáticamente el núcleo de la porfina, en forma simplificada, indicando únicamente las posiciones 1 á 8, halló que substituyendo esos hidrógenos por cuatro grupos metilos y por cuatro etilos, se puede preestablecer la existencia de las cuatro etioporfirinas siguientes, que designó con los números romanos de I a IV:



* Los números entre parèntesis. indican las fórmulas desarrolladas que figuran en el texto.



(III)

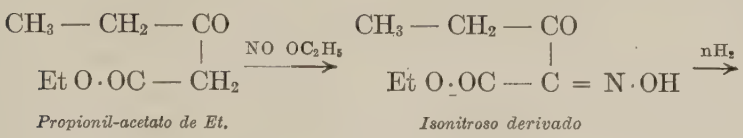


(IV)

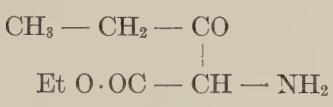
Esquema de las cuatro *etioporfirinas* posibles

Logrado esto, el próximo paso consistía en la preparación sintética de dichas etioporfirinas, a fin de compararlas con las etioporfirinas naturales y establecer de manera indubitable la estructura de estas últimas.

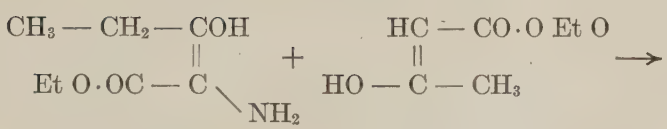
Pero antes de intentar la síntesis de las etioporfirinas fué necesario obtener en cantidad, con alto grado de pureza y absoluta seguridad respecto a su constitución, los pirroles substituídos: el hemopirrol, criptopirrol, etc., que debían emplearse. Ello se logró después de largos estudios sistemáticos, gracias a procedimientos como el siguiente:



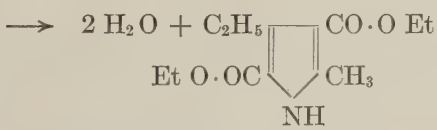
Propionil-acetato de Et. *Isonitroso derivado*



Amino-derivado

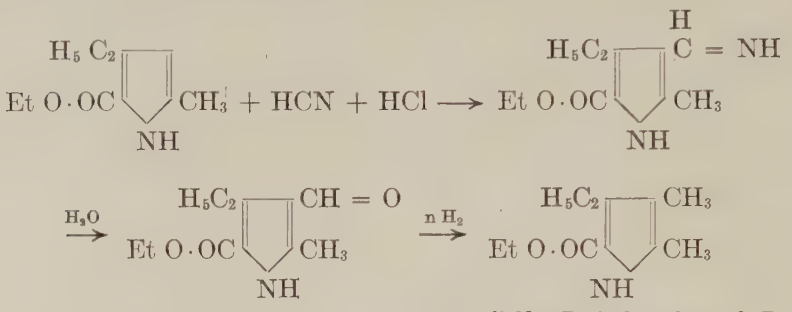


Forma enólica *Acetil-acetato de Etilo*



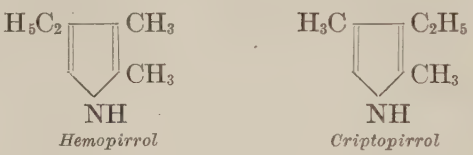
2-Me-4-Et-pirrol-3-5-dicarbonato de Etilo

El SO_4H_2 saponifica y elimina como CO_2 el grupo carboxietilo en 3 y se puede introducir un metilo en esa posición utilizando la síntesis de Gattermann:



2-3-di Me-4-Et-pirrol-5-carbonato de Et.

por saponificación del cual y eliminación de CO_2 se llega al *2-3-dimetil-4-etil-pirrol* o *hemopirrol.*

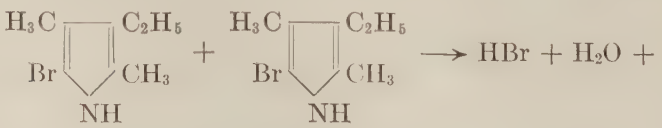


Hemopirrol *Criptopirrol*

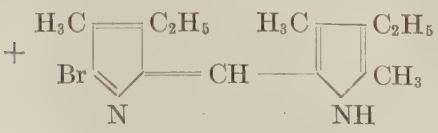
Una marcha idéntica, pero saliendo del acetilo acetato de etilo y condensando su amino derivado con acetilacetona y reducción del producto, permitió obtener el 2-4-di Me-3 Et-pirrol o cripto pirrol, y con procedimientos parecidos se sintetizaron el filo- y el opsopirrol.

El segundo paso hacia la obtención de los fragmentos esenciales para la síntesis final fué la obtención de los *dipirril-metenos*, que efectuó Hans Fischer por alguno de los siguientes procedimientos cuyas variantes le permitieron preparar numerosos dipirrilmetenos básicos y ácidos:

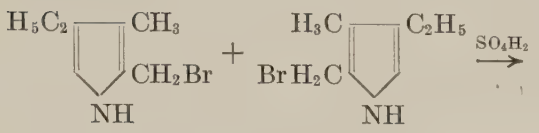
1) La acción del bromo sobre los pirroles provoca una condensación de los núcleos que por oxidación sucesiva dan los metenos.



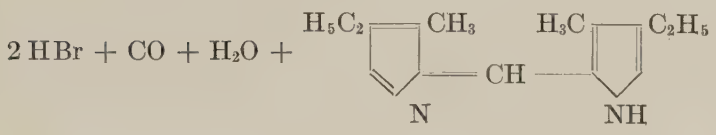
2 mol. de *5-Br-criptopirrol*



Meteno del Br-cripto-pirrol

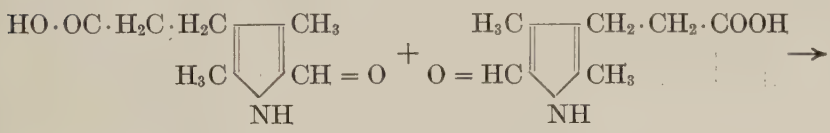


2 mol. de *2-Br-metil-opsopirrol*

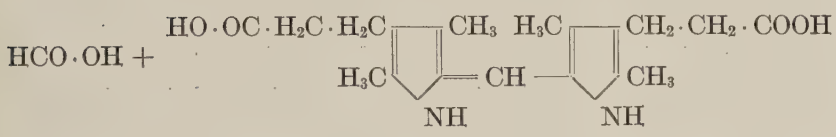


Meteno del opso-cripto-pirrol

2) Condensación de los aldehídos pirrólicos por medio de la solución muy concentrada de HBr en ácido fórmico, con lo cual salta uno de los grupos formilos como óxido de carbono y agua.



2 mol. *de aldehido del ácido criptopirrol-carbónico*



Meteno del ácido criptopirrol-carbónico.

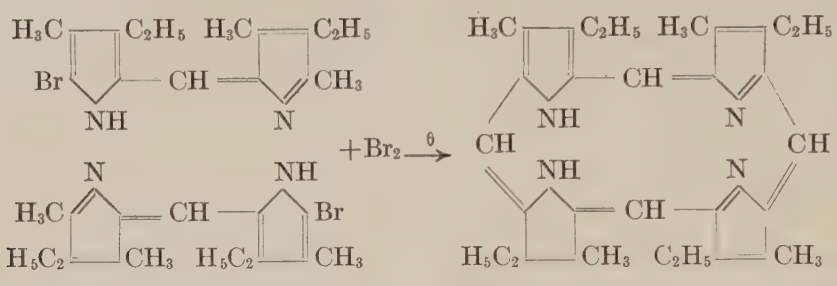
Todos los numerosos isómeros posibles de esta especie de cuerpos fueron previstos y separados en reacciones semejantes.

Los pirrilmetenos son compuestos intensamente coloreados y que tienen una tendencia extraordinaria a formar complejos metálicos con el Fe, Cu, Mg, y otros metales.

Pueden condensarse entre sí de varias maneras, especialmente por fusión de sus bromo-derivados, con resorcina o con ácido succínico que actúan como deshalogenantes, y se transforman en porfirinas.

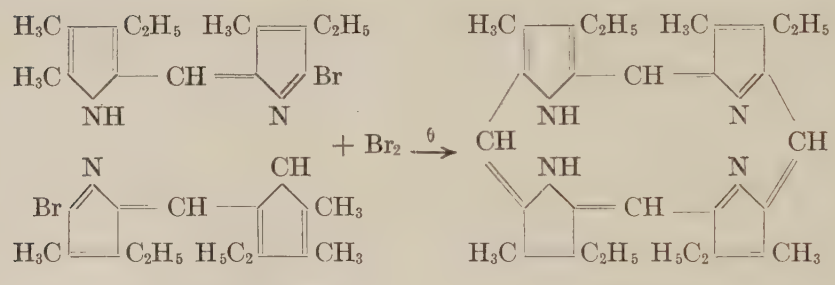
Las cuatro etioporfirinas fueron obtenidas de esa manera. Descri-

biremos a continuación la síntesis de las etioporfirinas I y III que son las más importantes.



2 mol. de *Br-criptopirril-meteno*

Etioporfirina I
(1)



Br-hemo-pirril-meteno + Br-cripto-hemo-pirril-meteno.

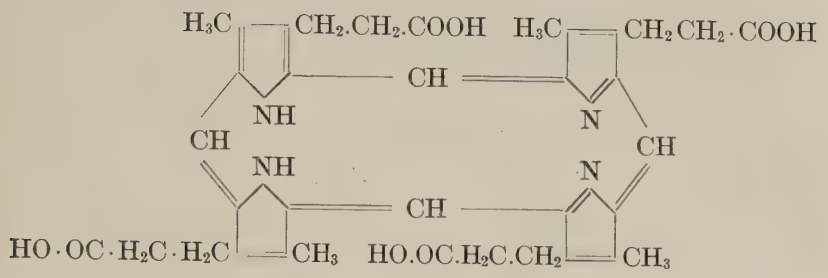
Etioporfirina III
o *Mesoetio-porfirina.*
(2)

Del estudio de estas substancias resultó que la etioporfirina III (2) era idéntica por su espectro, por su forma cristalina y por otras propiedades, con la etioporfirina obtenida de la hemina, llamada actualmente *mesoetioporfirina.*

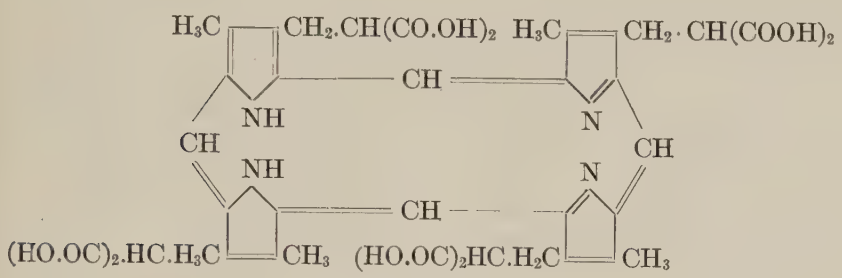
En las orinas de sujetos enfermos atacados de «porfirinuria» aisló Fischer dos porfirinas, la *Uro-* y la *Copro-porfirina* (3-4) que enérgicamente reducidas produjeron la misma etioporfirina, que se identificó con la *etioporfirina I* (1).

Llegó así a la conclusión de que todos esos compuestos tenían la misma estructura química y solo se diferenciaban por una diferente ordenación de sus grupos etilos y metilos.

Como la coproporfirina posée cuatro carboxilos y la uroporfirina ocho carboxilos y las fórmulas moleculares $C_{36}H_{38}O_8N_4$ y $C_{40}H_{38}O_{16}N_4$ dedujo para cada una las siguientes estructuras confirmadas luego por varias síntesis.



Coproporfirina
(3)



Uroporfirina
(4)

Volviendo a la etioporfirina III, idéntica como dijimos a la mesoetioporfirina obtenida de la hemina, y remontando la columna de los productos de desintegración del cuadro C, de la Lámina, pudo Hans Fischer planear las estructuras hipotéticas de los quince isómeros posibles y buscar en cada caso la confirmación de sus ideas mediante la síntesis.

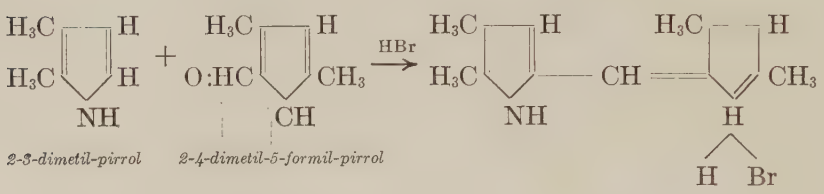
Todos esos estudios fueron coronados por el éxito más rotundo, una verdadera sucesión de triunfos, cuando obtuvo sintéticamente la mesoporfirina (8), la hematoporfirina (7), la protoporfirina (9) y finalmente la hemina (10) y su complejo ferroso fundamental: el *hemo* (11).

Síntesis de la hemina y del hemo

La síntesis total de la hemina se funda en la obtención de la *deuteroporfirina* (5), análoga en su estructura a la protoporfirina (9) de la que se diferencia por tener 2H libres en lugar de dos grupos vinilos —CH:CH_2 que esta última posee en las posiciones 2-4.

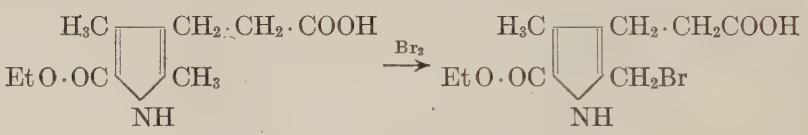
Esta síntesis comprende la preparación de los pirril-metenos adecuados y su condensación, que resumimos así:

1°.) Síntesis del meteno básico:



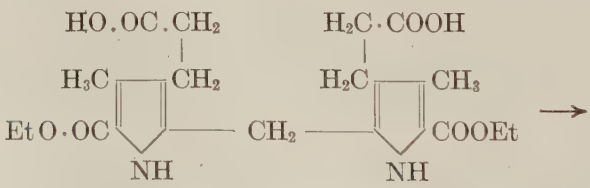
2-3-dimetil-pirrol *2-4-dimetil-5-formil-pirrol* *4-5-3'-5'-tetrametil-pirro-(2-2')-meteno*

2°.) Síntesis del meteno ácido:

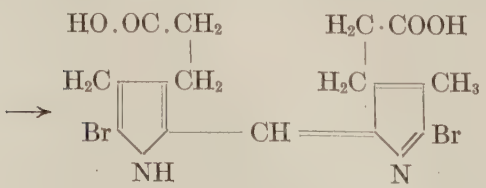


Acido 2-4-dimetil-5-carbetoxi-3-propiónico *2-Br-derivado*

Estas dos moléculas se condensan entre sí por acción del agua hirviendo y por hidrólisis, pérdida del carboxilo en 5- y bromuración en esa misma posición, se llega al meteno ácido:

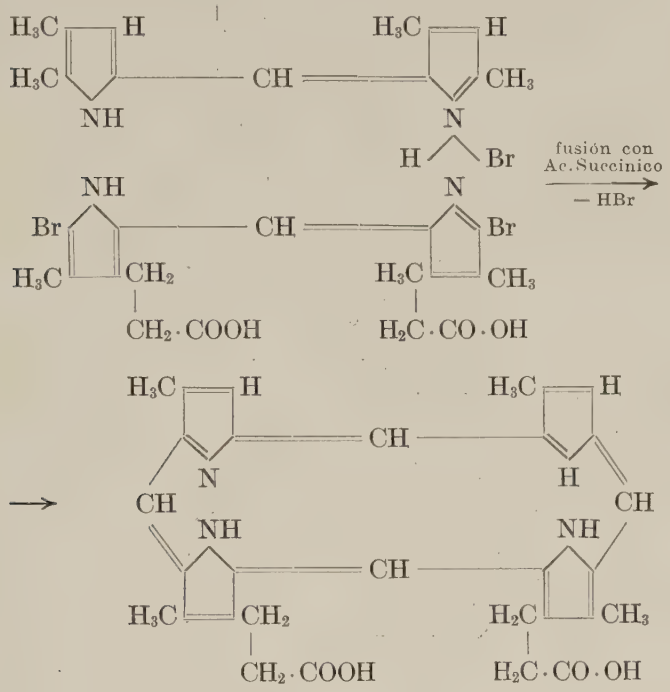


4-4'-dimetil-5-5'-dicarbetoxi-3-3'-dipropiónico-pirro-(2-2')-metano



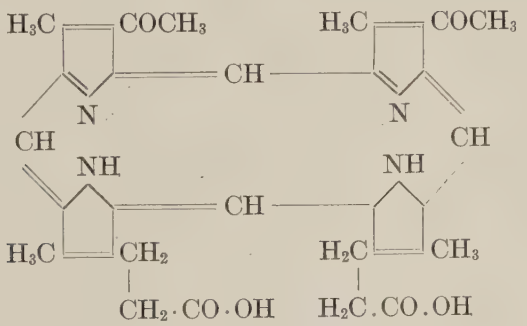
Acido 4-4'-dimetil-5-5'-di-Br-3-3'-dipropiónico-pirro-(2-2')-meteno.

3°.) Obtención de la deuteroporfirina, por fusión de ambos metenos en ácido succínico:

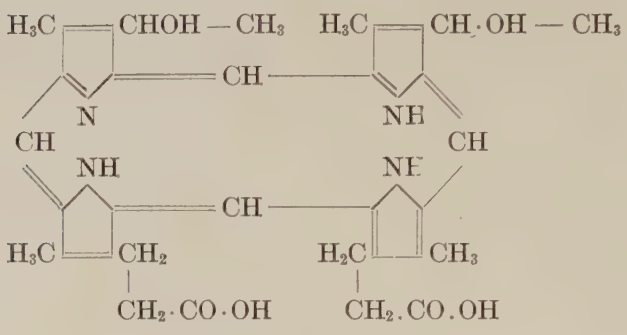


Deuteroporfirina
(5)

Los hidrógenos metínicos 2-4- fueron acetilados por acción del anhídrido acético en presencia del $Sn\,Cl_4$, que tiene una acción catalítica especial, y se sintetizó así una *diacetil-deuteroporfirina* (6) que reducida resultó idéntica a la hemato-porfirina (7) preparada por Hoppe-Seyler hacen ya más de 50 años.

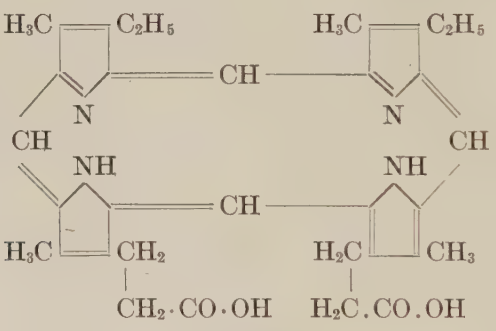


Diacetil-deuteroporfirina
(6)



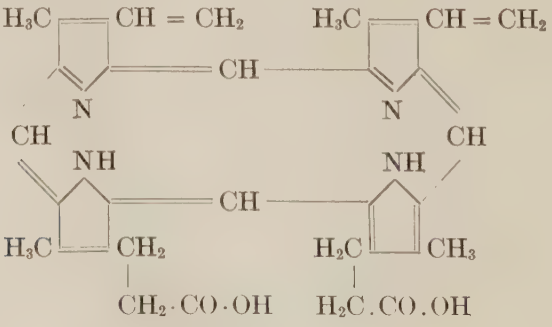
Hemato-porfirina
(7)

Por una reducción de la hematoporfirina pasó a la mesoporfirina (8), comprobando así su estructura:

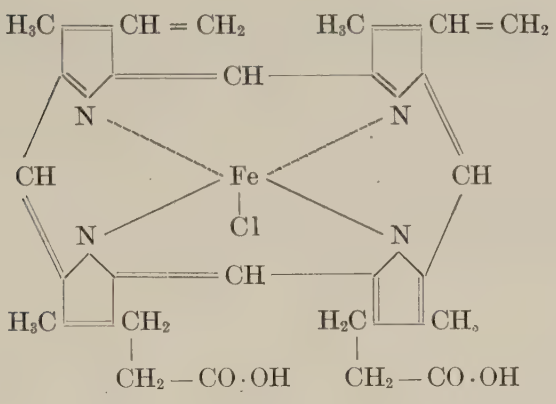


Mesoporfirina
(8)

Por deshidratación de la hematoporfirina (7) llegó Hans Fischer a la protoporfirina (9) que tiene dos grupos vinilos en posición 2-4 y que con el cloruro de hierro produce una *hemina* (10) idéntica a la extraída de la sangre.



Proto-porfirina
(9)

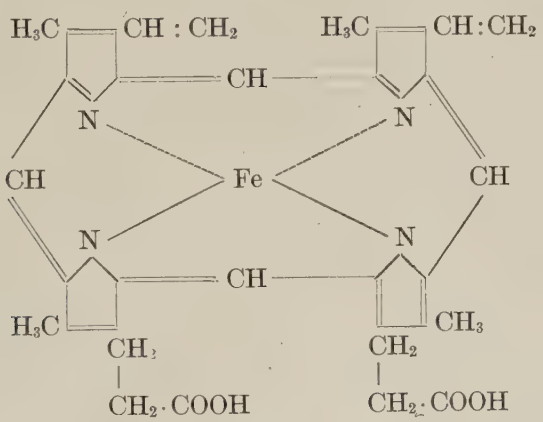


Hemina

(10)

Por adición de 2 H_2 la protoporfirina (9) cambia sus grupos vinilos (—CH:CH_2) en etilos (— C_2H_5) y tenemos la *meso-porfirina* cuya decarboxilación origina la *mesoetio-porfirina* o *etioporfirina III* (2) (ver pág. 143).

La hemina (10) tratada por el acetato de sodio cede su cloro, como Na Cl, y se obtiene así el *hemo* (11) el complejo ferroso fundamental del *hemocromógeno* y de la *hemoglobina*, descubierto en 1925 por Anson y Mirsky.



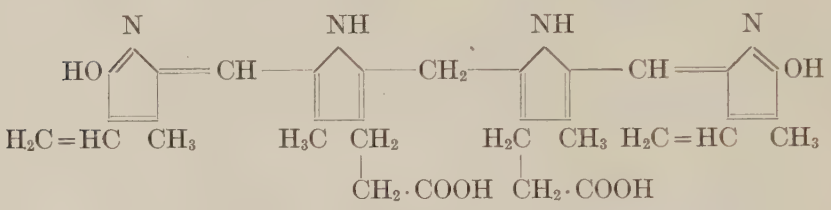
Hemo

(11)

Es importante recordar aquí, que el hemo es probablemente la unidad fundamental de todos los pigmentos naturales del tipo hemo-

globina. Por adición de globina se transforma en un hemocrógeno que no se diferencia en nada del natural y puede combinarse con otras proteinas, aminoácidos, etc., dando un número prácticamente infinito de «hemocromógenos» y de «heminas» de propiedades similares pero no idénticas.

Finalmente el hecho de que la hemina (10) y la protoporfirina (9) oxidadas se transformen en *bilirubina* (12) ha llevado a asignar a este colorante de la bilis la siguiente constitución, por rotura del ciclo de la porfirina:



Bilirubina
(12)

La clorofila A

El conocimiento y demostración de la estructura del núcleo fundamental de la clorófila se basa en las relaciones halladas entre sus productos últimos de reducción, o sea entre la pirro- y la pirroetio-porfirina, con los productos de reducción del hemo, o sea, con la meso- y la mesoetio-porfirina. (ver cuadros C y D de la Lámina).

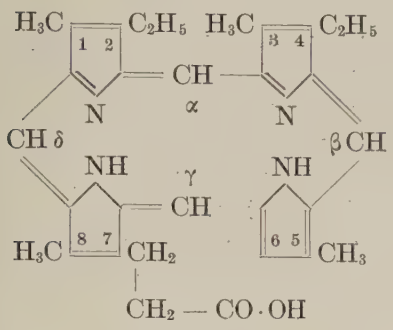
El razonamiento seguido por Hans Fischer fué el siguiente:

1°. La estructura del núcleo fundamental de la meso- y de la mesoetio-porfirina, ha quedado establecida después de la síntesis de ambos productos, que tienen las constituciones representadas por los esquemas (8-2).

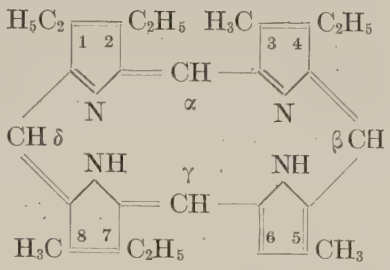
2°. La pirro- y la pirroetio-porfirina poseen la misma estructura fundamental que las anteriores, pero se diferencian de ellas por contener, respectivamente, un resto de ácido propiónico y un radical etilo, menos.

3°. La pirro- y la pirroetio-porfirina tienen un hidrógeno libre en la posición 6.

4°. En consecuencia, la estructura de la pirro- y de la pirroetio-porfirina corresponde a los esquemas (13-14) todo ello demostrado por síntesis de los principales derivados.

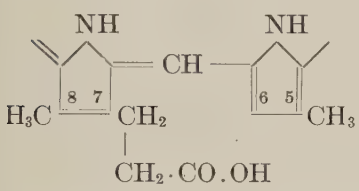


Prirro-porfirina
(13)

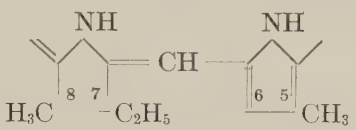


Pirroetio-porfirina
(14)

Resumiendo, para terminar: las porfirinas de la clorófila tienen el mismo esqueleto fundamental que las del hemo y toda la diferencia entre los derivados de ambos pigmentos reside en la mitad inferior de su molécula, que puede representarse así:

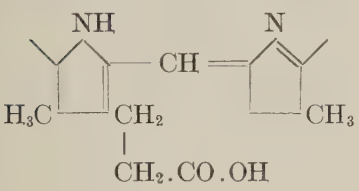


Pirro-porfirina

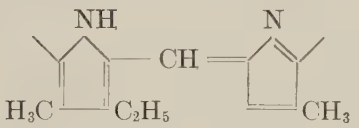


Pirro etio-porfirina

o en una forma tautómera (*):



Pirroporfirina
(13 *a*)



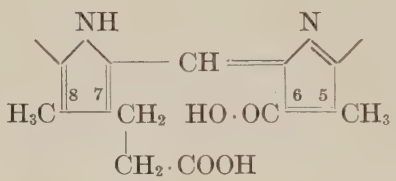
Pirroetio-porfirina
(14 *a*)

(*) Hasta aquí hemos desarrollado nuestro razonamiento sobre una forma única de las porfirinas aunque en realidad pueden existir varios isómeros de dichas sustancias. En efecto, por la migración de los hidrógenos imínicos se provocan desplazamientos de las dobles ligaduras dando varias formas tautómeras de las porfirinas. Todas ellas son posibles; no se sabe cuales predominan, pero cada una puede servir preferentemente para discutir y explicar determinados hechos en la química tan complicada de la clorófila.

El conocimiento de la llamada «estructura fina» de la clorófila, ha sido mucho más difícil de alcanzar que el de la hemina y no obstante los esfuerzos y los adelantos realizados no se halla todavía definitivamente establecido.

Hans Fischer después de evidenciar por primera vez en 1931, que existe una porfirina común a la hemina y a la clorófila, según dijimos más arriba, abordó el nuevo tema en la siguiente forma.

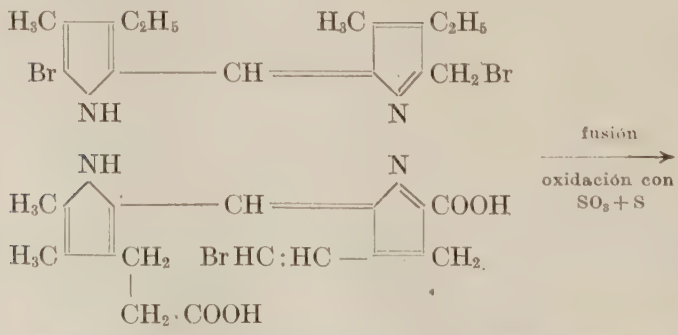
Se sabe que la clorófila, los feoforbidos, y su ácido libre la *feoporfirina* a_5 (19) por acción del HCl o HI concentrados pierden CO_2 y producen la *filoeritrina* (16) (ver cuadro D de la Lámina y pág. 135). La filoeritrina posee un grupo cetónico y oxidada produce finalmente rodo- y verdo-porfirinas (15), que son derivados de la pirro-porfirina, con un carboxilo en 6-:



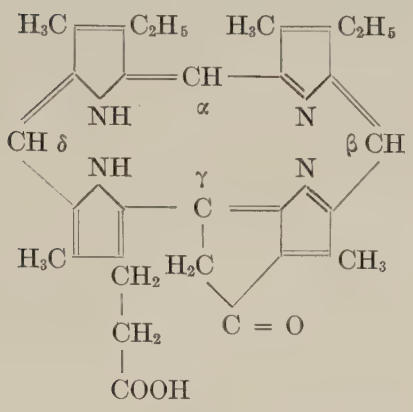
Rodo- y *Verdo-porfirinas*
(15)

La interpretación de este hecho llevó a Fischer a admitir que tanto la filoeritrina, como la clorófila y sus productos superiores, tenían una nueva cadena pentacarbonada e isocíclica, hipótesis de donde se derivó la actual estructura de las clorófilas.

De entre las varias estructuras posibles eligió la siguiente (16), cuya exactitud demostró por síntesis, fundiendo los metenos correspondientes:

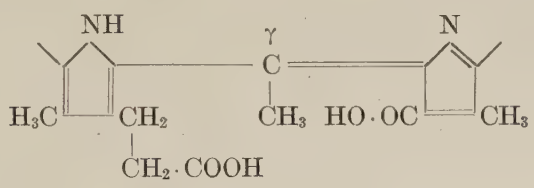


Meteno del opso-cripto-pirrol + Meteno de los ácidos Hemopirrol-carbónico y 3-vinil-4-Metil-pirrol-5-carbónico

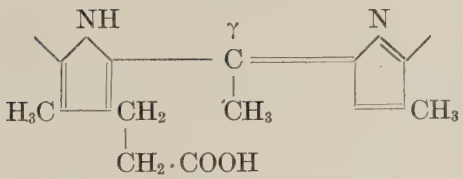


Filoeritrina
o *Acido 1-3-5-8-tetrametil-2-4-dietil-7-propiónico-6-γ-etanon-porfina.*
(16)

En consecuencia la filo-porfirina (17) y la filoetio-porfirina (18) productos de degradación de la filoeritrina (16) resultan ser homólogos superiores de la pirro- y de la pirroetio-porfirina (13*a*-14*a*) cuyo H del carbono γ se halla reemplazado por un metilo:

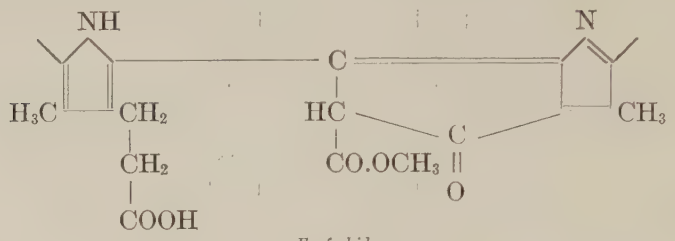


Filo-porfirina
(17)

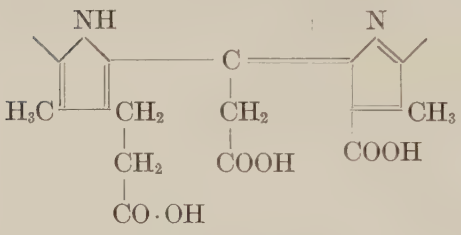


Filoetio-porfirina
(18)

El *feoforbido* (19) y la *clorina e* (20) que resulta de su hidrólisis con metilato de potasio, poseen esta constitución:

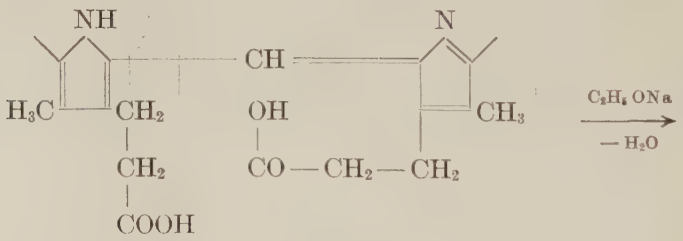


Feoforbido
el ácido libre = *feoporfirina* a_5
(19)

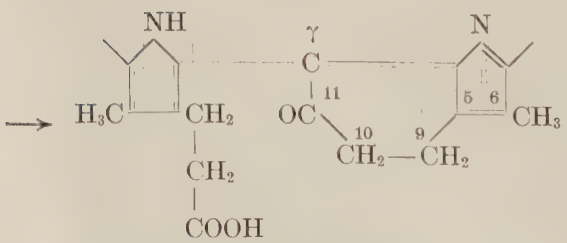


Clorina e o *cloroporfirina* e_4
(20)

Fischer halló un nuevo pasaje desde la serie de la hemina a la de la clorófila, tratando la mesoporfirina (21) por el etilato de sodio, con lo cual se deshidrata y se transforma en mesorodina (22):

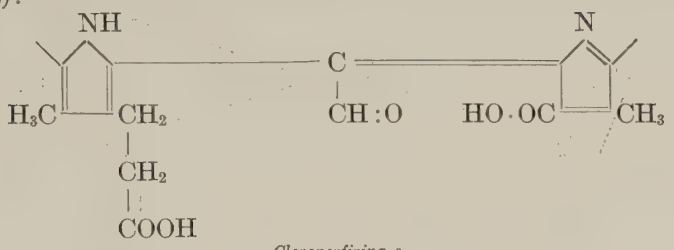


Mesoporfirina
(de la hemina)
(21)

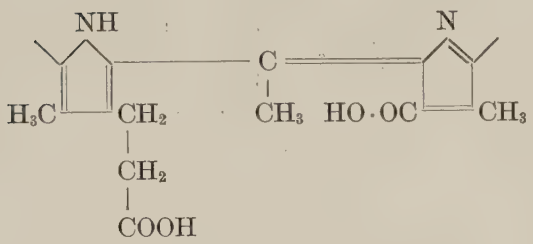


Mesorodina
(22)

La *mesorodina* (22) oxidada por el permanganato de potasio produce *cloroporfirina* e_5 (23) reducible a *cloroporfirina* e_4 (24) las cuales pueden también obtenerse por degradación de la *clorina* e_6 (20): (ver la lámina):

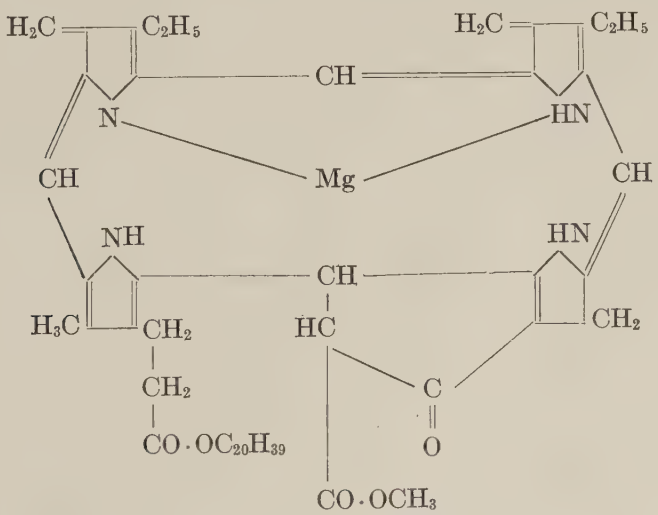


Cloroporfirina e_5
(23)

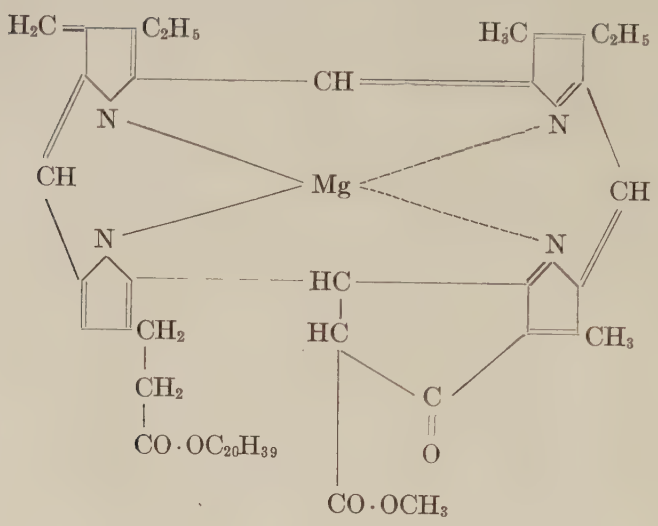


Cloroporfirina e_4
(24)

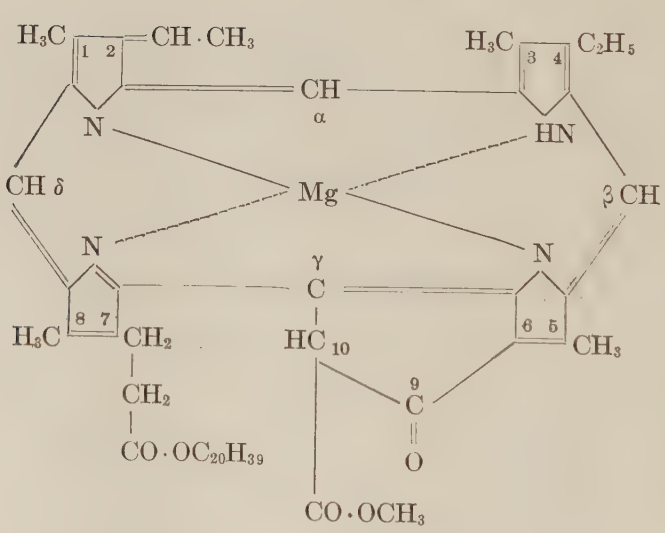
En 1932 presentó Hans Fischer la primera fórmula de estructura de la clorófila a, seguida luego por las modificaciones de 1933 y de 1934 y volviendo a principios de 1935 a la fórmula de 1933 (25).



1932 ($C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$)



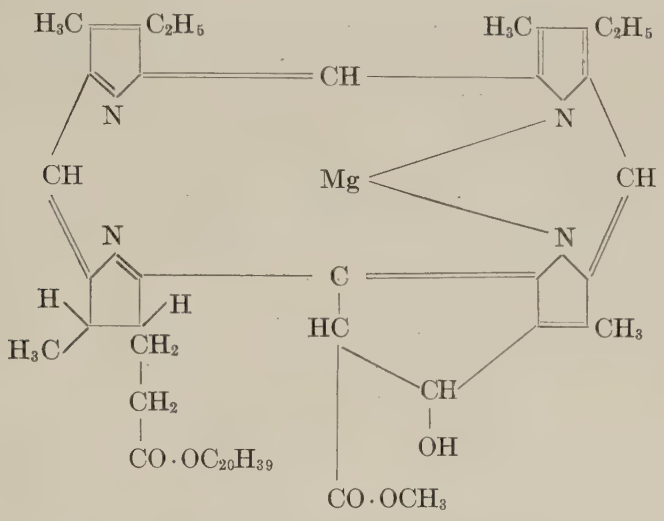
1934 ($C_{55}H_{74}O_5N_4Mg$)



1933 y 1935 ($C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$)

Clorófila a según Hans Fischer

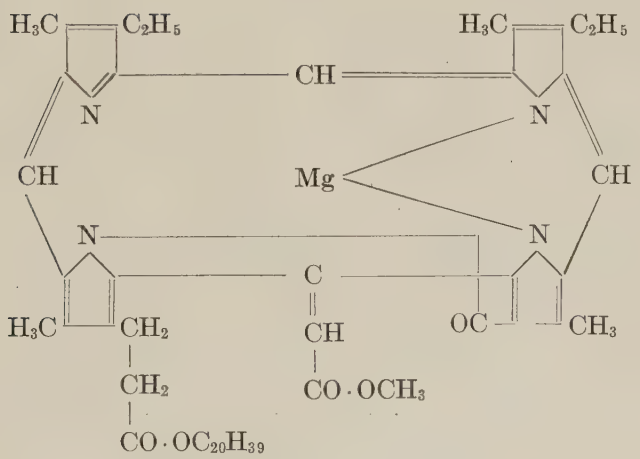
En 1933 Stoll propuso una estructura parecida a la de Hans Fischer (26) pero con 2H más y sin carbonilo en la posición 9-. Al mismo tiempo Conat presentó una fórmula con función lactama (27).



Clorófila a según Stoll (1933)

($C_{55}H_{76}O_5N_4Mg$)

(26)



Clorófila a según Conant (1913)

($C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$)

(27)

Ambas fórmulas debieron descartarse por varias razones y especialmente cuando Hans Fischer preparó la oxima de la clorófila a' en 1934.

La fórmula de constitución que mejor explica las propiedades de la clorófila a, es la última propuesta por ese gran químico (25).

Pueden seguirse en ella todas las transformaciones de que hemos hablado, con la mayor lógica y sin forzar ningún razonamiento.

La cadena isocíclica propuesta por Fischer es en realidad un ácido β-cetónico, capaz de enolización y de producir las demás reacciones características de ese tipo de substancias, en medios ácidos o alcalinos.

La formación de la filoeritrina (16) por acción del HCl concentrado sobre la clorófila a, con pérdida de CO_2, no es pues otra cosa que un «*desdoblamiento cetónico*» de ese acido β-cetónico.

La producción de la *clorina* e_6 (20) es sencillamente un «*desdoblamiento acidico*» del mismo cuerpo.

Solamente la unión del átomo de Mg no se halla seguramente esblecida, lo cual se comprende por la facultad de tautomerizarse que presentan los núcleos pirrólicos.

Recientemente Hans Fischer ha efectuado una síntesis parcial del *metil-clorofilido a* haciendo actuar el bromuro de etil-magnesio sobre el *metil-feoforbido a* natural y por sus reacciones y por su espectro, el producto sintético es idéntico al obtenido por desdoblamiento de la clorófila a por la *clorofilasa* en presencia del alcohol metílico. (Ver pág. 140).

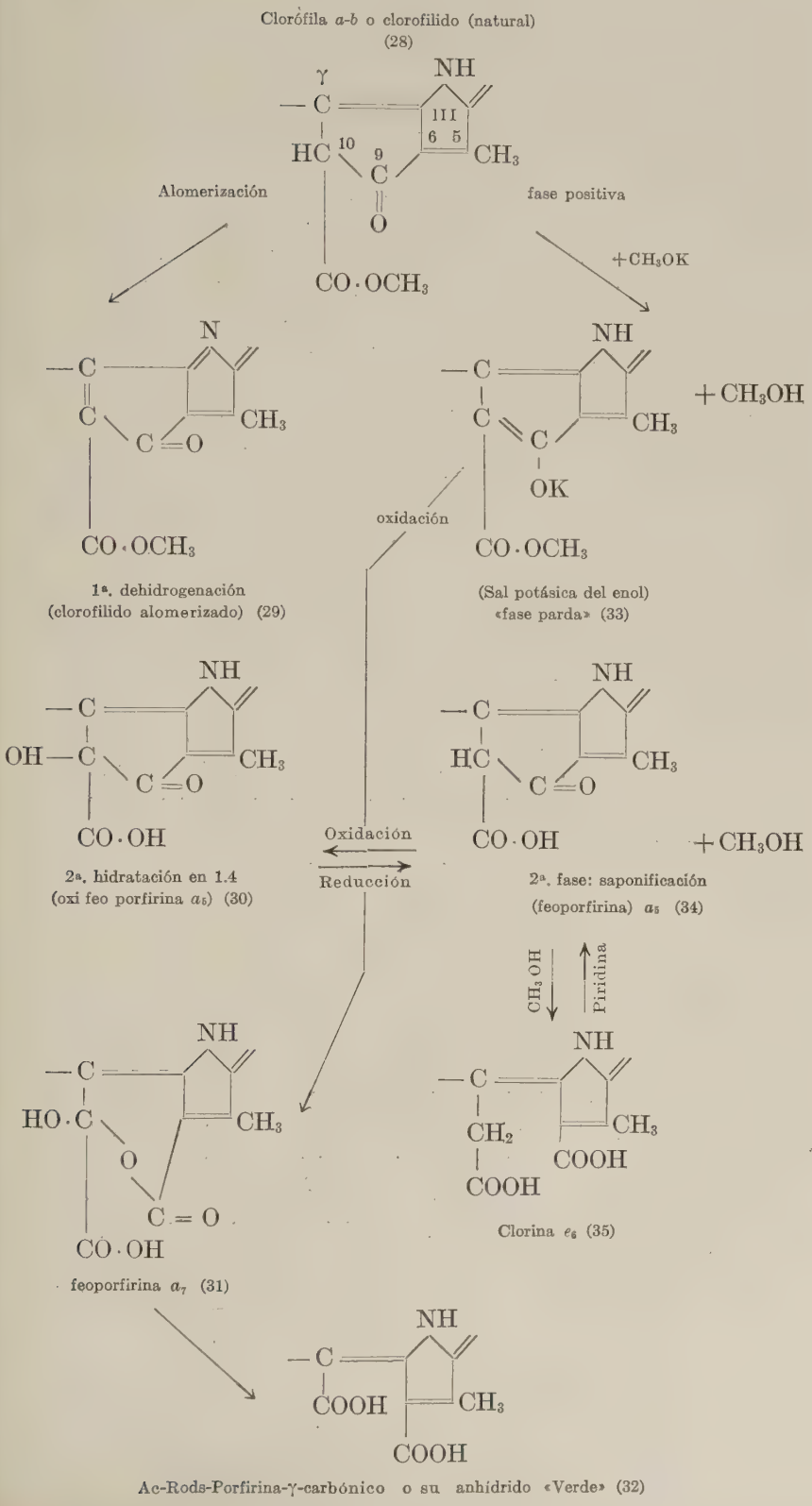
El fenomeno de las fases y la «alomerizacion»

Dos transformaciones típicas de la clorófila intacta son la «*prueba de fase*» y la «*alomerización*».

La primera es producida por la clorófila fresca, cuya solución verde al ser adicionada de metilato de potasio produce una fuerte coloración parda (la «*fase parda*») que rápidamente desaparece y retorna al verde inicial.

La «*alomerización*» se observa cuando la clorófila o los clorofilidos se evaporan a sequedad de sus soluciones alcohólicas: pierden la facultad de cristalizar y no producen ya la fase parda por acción del metilato de potasio, no obstante lo cual se disuelven dando la misma coloración final, verde, que el producto «*fase-positivo*».

Estos fenómenos descubiertos por Willstatter, y atribuídos por él a una apertura de la unión lactámica en γ-γ (ver pág. 138) y a su reconstrucción en posición diferente, fueron frecuentemente confundidos entre sí y su verdadero mecanismo solo recientemente ha comenzado a aclararse.


Clorófila a-b o clorofilido (natural)
(28)
Alomerización
fase positiva
+CH₃OK
1ª. dehidrogenación
(clorofilido alomerizado) (29)
(Sal potásica del enol)
«fase parda» (33)
+CH₃OH
oxidación
2ª. hidratación en 1.4
(oxi feo porfirina a₅) (30)
Oxidación
Reducción
2ª. fase: saponificación
(feoporfirina) a₅ (34)
+CH₃OH
CH₃OH
Piridina
Clorina e₆ (35)
feoporfirina a₇ (31)
Ac-Rods-Porfirina-γ-carbónico o su anhídrido «Verde» (32)

Conant, de la Universidad de Harvard, fué quien descubrió en 1931 el hecho fundamental de que en la alomerización se producen una deshidrogenación y una oxidación de la clorófila y sus derivados.

Hans Fischer interpretó esos hechos, admitiendo que la deshidrogenación se produce perdiendo los H del C-10 y del NH del núcleo pirrólico III, con formación de una doble entre los C-10-γ y de un sistema conjugado con el indicado N. (28-29).

La oxidación consiste en la adición de OH-H en los extremos 1-4 del sistema conjugado produciéndose la oxi-feoporfirina a_5 (30).

En medio alcalino ésta se oxida y pasando sucesivamente por la *feoporfirina* a_7 (31) y por su forma cetónica, origina el *ácido rodoporfirin-γ-carbónico* (32) cuyo *anhídrido* tiene color verde.

Según Hans Fischer, la formación de las fases o «*pruebas de fase*» como también se llama, es una consecuencia de la «*enolización*» de la función cetónica del C-9 por el H del C-10 (28-33).

El color pardo es debido a la sal alcalina del «*enol*» y desaparece rápidamente porque la «*descomposición acídica*» de la cadena isocíclica, β-cetónica se continúa, pasando por la *feoporfirina* a_5 (34) hasta llegar a la *clorina e* (35).

Durante esas transformaciones en medio alcalino, interviene la oxidación por alguna manera aun no establecida, hasta llegar al ácido rodo-porfirin-γ-carbónico (32) cuyo anhídrido es verde, según vimos más arriba.

Se comprende ahora que las clorófilas y los clorofilidos alomerizados que ya no poseen H sobre el C-10 no puedan enolizarse, no puedan dar coloración parda al ser tratados por el metilato de potasio y en consecuencia son «*fase-negativos*».

El cuadro de pág. 161 resume todas estas transformaciones.

La clorofila B

La *clorófila b* se encuentra en la proporción de 1:3 de clorófila a. Su conocimiento se halla más retardado a causa de la dificultad que existe para tenerla pura y en cantidades.

La clorófila b de Willstätter no fué nunca pura y contenía un 10% de su isómero a, que solo pudo separarse gracias a la aplicación de los métodos del análisis cromatográfico por Winterstein y Stein.

Este método ideado hacen unos 20 años por el botánico Tswett, consiste en filtrar una solución que contiene los principios que se desean separar, al través de una capa de una substancia adsorbente (azúcar en este caso) colocada en un tubo de vidrio. La diferente

adsorción se nota por la formación de capas diversamente coloreadas que pueden separarse mecánicamente y extraerse por disolventes apropiados.

No obstante aquella dificultad Willstätter estableció la fórmula molecular de la clorófila b = $C_{55}H_{70}O_6N_4Mg$ (o bien H_{72}). La diferencia esencial entre ambas clorófilas reside en que la b tiene un átomo más de oxígeno que su isómero a.

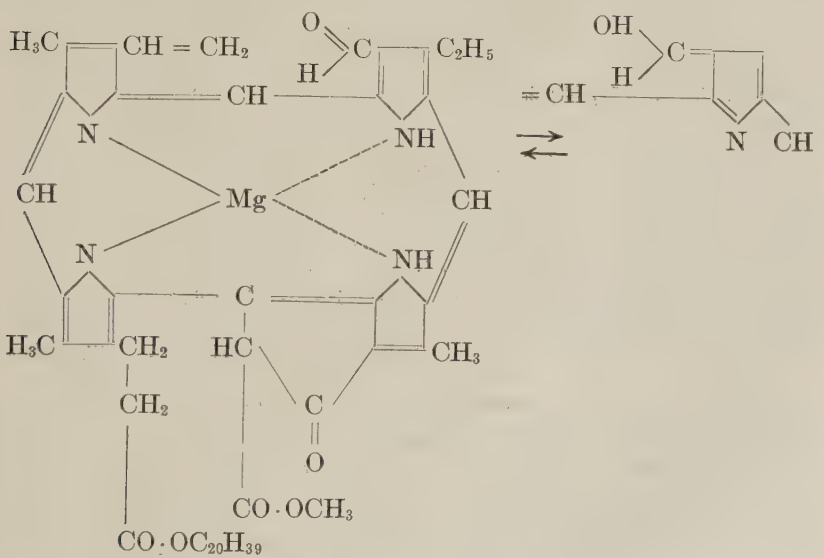
Willstätter demostró también que su degradación produce rodina g (componente equivalente a la clorina e, característico de la clorófila b) y luego las mismas filo-, pirro-, verdo- y rodo-porfirinas, que pueden decarboxilarse hasta las etio-porfirinas producidas por la clorófila a.

La estructura de la clorófila b tiene que estar calcada sobre la de su isómero a, y así lo han admitido todos los investigadores modernos.

El oxígeno suplementario se halla bajo forma de un nuevo carbonilo (C = O) que Conant ubica en reemplazo del C-β y Stoll en el C-10 rompiendo la cadena isocíclica.

Hans Fischer a principios del año 1935, ha propuesto una fórmula basada sobre la que atribuye a la clorófila a, en la cual reemplaza el CH_3 de la posición -3 por una función aldehído, que puede isomerizarse en el enol correspondiente.

Ultimamente ha reemplazado el grupo etilideno del C-2 por un vinilo y esta sería según Fischer la mejor reoresentación actual de la estructura de la clorófila b (36):



Clorófila b ($C_{55}H_{70}O_6N_4Mg$)
según Hans Fischer, (1935)

(36)

Tales son los últimos y más notables resultados a que se ha llegado en la elucidación de los problemas que se plantearon sobre la estructura y las relaciones del hemo y de la clorófila.

Enorme ha sido la labor; inmenso el esfuerzo desplegado, pero una magnífica cosecha de descubrimientos ha venido a coronar tantos desvelos. Y si aún quedan algunos puntos a resolver, debemos admitir que en su conjunto el problema ha sido ampliamente iluminado gracias al trabajo metódico y paciente de los químicos, especialmente por los de la escuela alemana.

En la modesta capacidad de mis fuerzas he intentado hacer llegar a los lectores un reflejo de esa maravillosa disposición siempre creciente, que tiene la Química Orgánica para penetrar en la estructura de los más intrincados compuestos naturales; para demoler gradualmente sus complicados edificios moleculares y para reedificarlos sistemáticamente gracias a la síntesis.

Y en estos momentos de perturbación científica, de tumultoso surgir de nuevas doctrinas y de injustificado desdén hacia otras, es cuando conviene traer, para ejemplo de impacientes renovadores, que el hallazgo de la constitución y síntesis de los colorantes de la sangre y de la clorófila constituye un triunfo más de la Química Orgánica, basado en las teorías clásicas de la valencia y de la estructura que, han edificado toda la química moderna.

Buenos Aires, Abril de 1936.

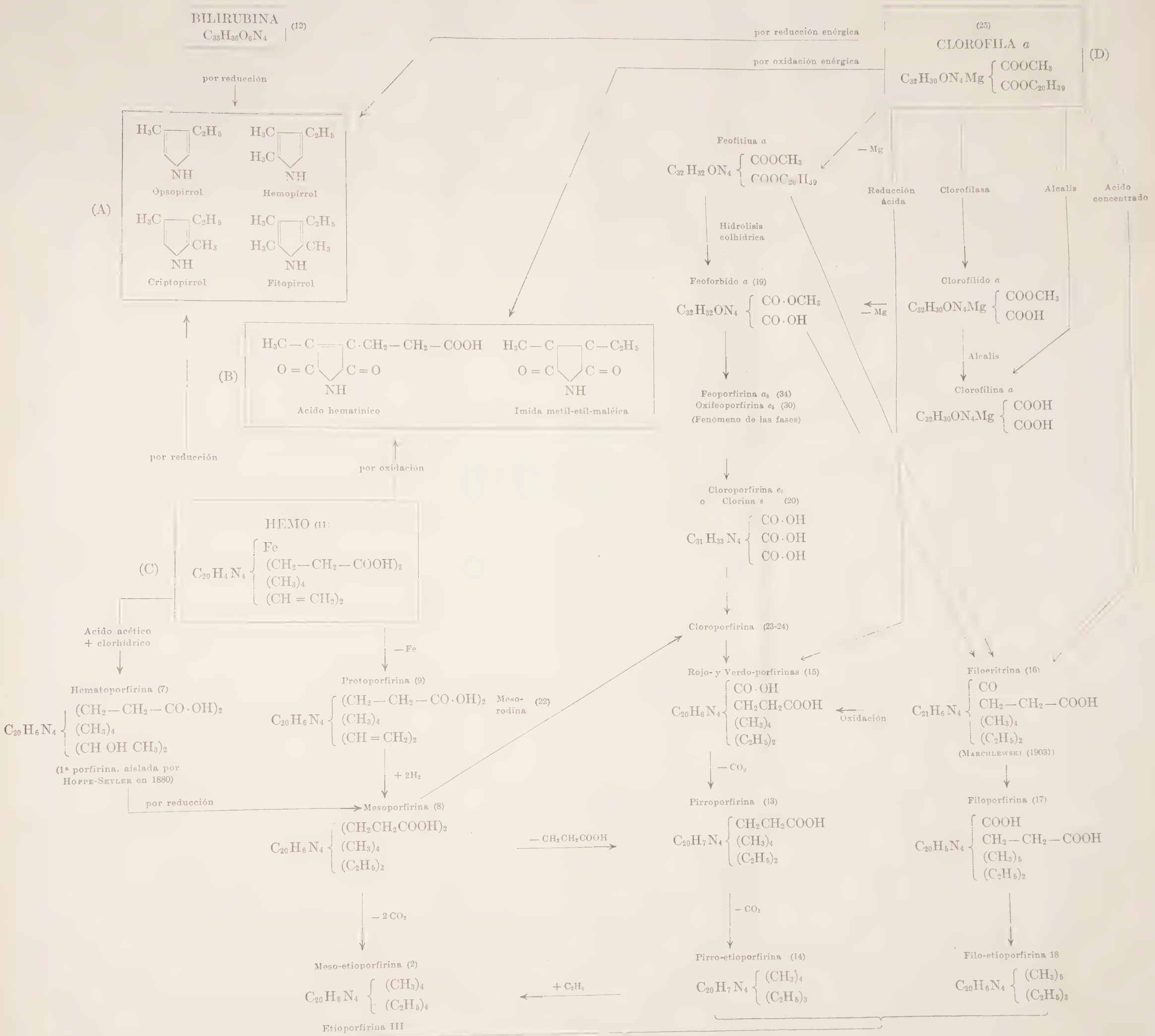
BIBLIOGRAFIA

Verdeil, *C. R.*, 1851, 33; 689
Willstatter, *Ann.*, 1913, 400; 182, 3. *Physiol. Chem.*, 1912, 82, 423.
Nencki y Zaleski, *Ber.*, 1901, 34; 997.
Piloty, *Ann.*, 1910, 377; 314 id. 388; 313.
Küster, *Z. Physiol. Chem.*, 1912, 82; 463.
Treibs y Wiedemann, *Ann.*, 1929, 471; 146,
Richter, *Chemie d. Kohlenstoff verb.*, 1, 827, 3-35.
Fischer, *Ann.*, 1926, 448; 193 *Ber.*, 1927, 60; 2639 *Naturw.*, 1930, 1026.
Fischer, *Ann.*, 1928, 459; 53.
Fischer, *Ann.*, 1927, 458, 117; *Ber.*, 47-2544; *Ber.*, 55-1942; *Ber.*, 56-1204; *Ann.*, 466, 165.
Fischer, Stangler, *Ann.*, 1927, 459; 53.
Fischer y Treibs, *Ann.*, 1928, 466; 188.
Fischer y Kirstahler, *Ann.*, 1929, 466; 178; *Ann.*, 1927, 458; 135.
Fischer y Ziele. *Ann.*, 468, 98.
Treibs F., Zeile C., *Z. Physiol. Chem.*, 1931, 195.
Fischer y Riedl, *Ann.*, 1931, 486, 178.

TRANSFORMACIONES QUIMICAS Y RELACIONES EXISTENTES

entre los colorantes

de la SANGRE, de la BILIS y la CLOROFILA



Los números entre paréntesis que figuran al costado del nombre de las substancias, son los correspondientes a las fórmulas desarrolladas en el texto.

Fischer, Moldenhaver y Sus, *Ann.*, 1931, 485; 1.
Fischer y Riedmair, *Ann.*, 1932 497; 181.-1932, 499; 288.-1931, 490; 91.
Fischer y Ebersberger, *Ann.*, 1934, 509; 19.
Fischer, *Soc.*, 1934; 245.
Treibs, *Angew. Chem.*, 1934, 47; 294.
Dietz, *J. Chem. Ed.*, 1935, 12; 208.
Stoll y Wiedemann, *Helv. Chem.*, Acta 1933, 16; 183.
Armstrong, *Chem.* and *Ind.*, 1933, 52; 809.
Willstätter, *Ber.*, 1914, 47; 2831.
Willstätter y Utringer, *Ann.*, 380, 177.-382, 129 y 94.
ischer, Riedmair y Hasenkamp, *Ann.*, 1934, 508; 224.
ischer y Hasenkamp, *Ann.*, 1934, 513; 107.
ischer y Spielberger, *Ann.*, 1934, 510; 156.
onant, *J. Am. Chem Soc.*, 1931, 53; 359-352.
ischer, Sus y Klebs, *Ann.*, 1931, 490; 38.
ischer y Riedmair, *Ann.*, 1933, 506; 107.
Winterstein y Stein, *Z. Physiol. Chem.*, 1933, 263.-1934, 139.
Kuhn, *Z. Physiol. Chem.*, 1931, 197; 141. Id., 200; 108.
Karrer, *Bull.*, 1935, 2; 93.
Conant, Dietz y Werner, *J. Am. Chem. Soc.*, 1931, 53, 4436.
Stoll y Wiedemann, *Helv. Chem.* Acta, 1934, 17; 456.
Fischer y Breitner, *Ann.*, 1934, 511; 183 id. 1935, 516, 61.
Fischer y Grassl, *Ann.*, 1935, 517.

INDICE

— Introducción 129
— La sangre y la resina verde de las plantas 130
— La hemina y la clorófila poséen un núcleo común 133
— La hidrólisis de la clorófila 139
— La porfina y las porfirinas 141
— Síntesis de la hemina y del hemo 147
— La clorófila A 152
— El fenómeno de las fases y la «alomerización» 160
— La clorófila B 162
— Conclusión 164

TRATAMIENTO RACIONAL DE LOS EPILEPTICOS

Por

EDUARDO KRAPF

DEL HOSPICIO DE LAS MERCEDES

El título de este artículo habla del tratamiento de *los epilépticos* y no del de *las epilepsias* ni mucho menos de *la epilepsia*. Este modo de formular el tema no es resultado casual o arbitrario, sino producto de una intención bien deliberada. En realidad no hay más que epilépticos individuales. Toda agrupación o clasificación tiene siempre algo de artificial y de forzado. Quien desee ver todos los problemas de lo epiléptico en su entera extensión, debe considerar *cada enfermo* como *un problema especial*, un problema, que hay que estudiar detenidamente, antes de que se pueda formar un criterio sobre los nexos causales.

Tal análisis del caso individual es el fundamento necesario para la constitución del edificio de un tratamiento realmente racional del síndrome epiléptico. No es camino bueno narcotizar el cerebro del enfermo tan intensamente, que no sea ya capaz de producir ataques, pero igualmente falle en todas sus demás capacidades. Tampoco conviene aferrarse a la primera causa real o supuesta que revele el exámen y tratarla única y unilateralmente. Lo que se necesita es un tratamiento *racional e individual* basado sobre el análisis preciso del caso especial en cuanto a los factores causales que justamente aquí y ahora están en juego.

El ataque convulsivo es una forma de reaccionar propia de ciertos cerebros o, mejor dicho, de ciertos organismos frente a determinadas nocividades que les afectan. Hay algunos individuos, en quienes, frente a tales nocividades, la reacción epiléptica se desencadena con una facilidad especial. Por ejemplo, es sabido que el cerebro infantil responde ya muy a menudo con un ataque convulsivo a un ascenso brusco de temperatura. Hay otras personas en quienes la nocividad debe llegar a una cierta intensidad antes de que se produzca la reacción epiléptica. Este grupo comprenderá la mayoría de los individuos,

con la reserva de que la intensidad de la noxis epileptógena podrá variar de caso a caso. Hay muy probablemente también individuos enteramente o casi enteramente incapaces de sufrir ataques epilépticos. Habla en favor de la existencia de este tercer grupo el hecho de que no conozcamos ninguna nocividad que, al agredir el organismo humano, cause siempre y sin excepción ataques epilépticos.

Considerada desde este punto de vista la clasificación usual de los trastornos epilépticos en formas *sintomáticas* de un lado y *esenciales* (criptogenéticas) del otro, parece no menos artificial y forzada que todas las otras. Las investigaciones sobre los sucesos fisiopatológicos antes y en el ataque epiléptico, y el estudio de las alteraciones morfológicas que causan ataques frecuentes y seriados en el cerebro, indican en forma inequívoca que no existe ninguna diferencia esencial entre los ataques llamados sintomáticos y los genuinos. Solamente las convulsiones del tipo Jacksoniano, caracterizadas por la conservación de la conciencia y por la propagación paulatina «en forma de tejado» («in compound sequence») de los fenómenos motores, requieren una posición aparte. Todos los demás ataques pertenecen a una sola entidad fisiopatológica, de tal modo que se puede decir que no hay ataque epiléptico que no sea simultáneamente esencial y sintomático.

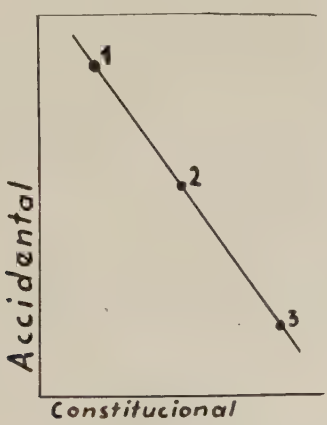


Fig. 1. - Esquema de los factores causales en las epilepsias.

Hay que insistir sobre la fórmula de que un ataque epiléptico se produce únicamente al actuar una *nocividad epileptógena* sobre un *cerebro epileptófilo;* fórmula, cuyo valor explicativo no depende de las proporciones respectivas de lo constitucional y de lo accidental en la suma de los factores causales. En la figura 1 trato de esquemati-

zar los hechos. El caso representado por el punto 1 se llamaría en la terminología corriente «sintomático», el caso 3 «esencial». Sobre el caso marcado por el punto 2 se levantarían esas discusiones clasificatorias tan bien conocidas entre los psiquiatras.

En cuanto a las llamadas epilepsis *sintomáticas*, este concepto está fundado, como ya tuve oportunidad de decir, sobre el hecho de que el ataque epiléptico no es síntoma obligatorio de ninguna afección cerebral del hombre. Ni tumores, ni infecciones ni intoxicaciones producen siempre y en todos los casos ataques convulsivos. Por consiguiente, no podemos explicar los casos sintomáticos sin la suposición de un factor constitucional.

La demostración de la constante existencia de factores accidentales en casos «*esenciales*» parece un poco más difícil. Sin embargo, hay bastantes argumentos también en su favor. Demostraré más tarde varios hechos al respecto. Aquí haré únicamente algunas observaciones generales. No me cabe duda de que la diferencia de frecuencia de las epilepsias para cada edad (véase figura 2), con nada se explica tan

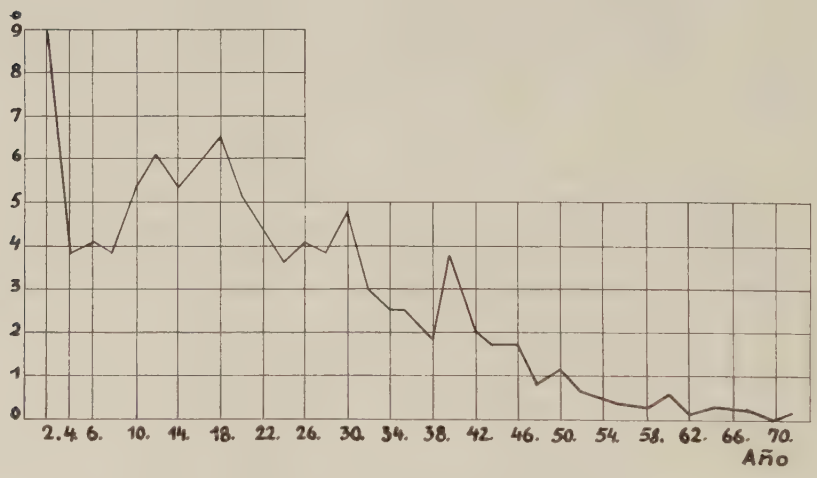


Fig. 2. - Estallido de la epilepsia en 2567 epilépticos del Asilo de Berlin-Wuhlgarten (*Wolffenstein*)

fácilmente como con los factores accidentales que acarrean los diferentes estados de la evolución individual. Los enormes cambios que se hacen notar en cuanto a la frecuencia de los ataques según las estaciones (véase figura 3) se comprenden de modo análogo. El momento accidental estaría representado aquí por las condiciones climáticas o, mejor dicho, por los cambios que en estas se producen de estación

a estación y de mes a mes. Más importante aún es quizás la consideración de que en un padecer como la llamada «epilepsia esencial», la causa accidental es a veces inhallable, pues aunque haya existido en el comienzo, no perdura por siempre. Ya en 1881 insistió Gowers con mucha razón sobre el concepto de la epilepsia como «enfermedad perpetuada por sí misma («epilepsy, a self-perpetuating disease»). O. Foerster (1926) dice lo mismo al formular que cada ataque epiléptico podría ser considerado en parte como «consecuencia del ataque precedente y causa del siguiente». Todo médico, que haya tenido

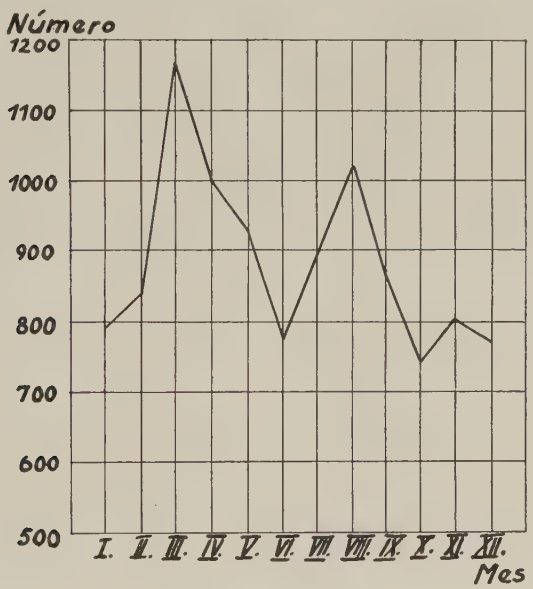


Fig. 3. - Distribución de los ataques sobre los meses del año (*Gallus*).

la oportunidad de ver una vez un estado de mal, se conformará con este concepto, aún sin argumentación más detallada. Resulta de todo esto, que en el caso de un individuo muy dispuesto a la reacción epiléptica, la causa accidental actuará posiblemente sólo en la producción del primer ataque, mientras que los siguientes, como preparados por el primero, podrían prescindir de causas accidentales o contentarse con un estímulo irritador insignificante. El ataque epiléptico puede ser considerado en cierto sentido como «reflejo condicionado» que puede convertirse en «hábito». Es interesante que el eminente conocedor de la epilepsia, Muskens, de Amsterdam (1927), interpreta el ataque epiléptico sin reservas como «descarga central atrasada» («central after discharge» de Sherrington) de un reflejo mioclónico,

y que los ilustres investigadores norteamericanos Lennox y Cobb en su importante monografía sobre la epilepsia (1928) hablan expresamente del «habit», del hábito, que puede llegar a ser la reacción convulsiva.

Con esto ya tenemos en manos un importante trozo de material para el establecimiento de una terapia realmente racional de los epilépticos. Después de lo arriba dicho no puede caber duda de que las perspectivas del tratamiento son tanto más favorables, cuanto menos se haya hecho hábito la reacción epiléptica, vale decir, cuanto más temprano empecemos el tratamiento. Se ve, pues, que la importancia del *tratamiento del primer ataque* (y, por lo tanto, de su diagnóstico), no puede ser exagerada. Una segunda conclusión importante consiste en que debemos esforzarnos por crear a toda costa *intervalos largos* libres de ataques. Con otras palabras: tenemos que facilitar al organismo la oportunidad de escapar al círculo vicioso de la reacción epiléptica, de olvidar, por así decir, sus hábitos epilépticos. Aún sin que entremos aquí en detalles, se concebirá con facilidad que de todo lo dicho resultarán notables diferencias en cuanto al tratamiento de los epilépticos recientes y de los inveterados.

Si ahora nos preguntamos en qué punto de la patogénesis del ataque epiléptico sería recomendable y útil nuestra intervención terapéutica, por de pronto tenemos que renunciar a la posibilidad seductora de influir sobre la disposición epiléptica del cerebro. Ahí nos falta todo camino de acceso. Ni siquiera sabemos en que consiste esa disposición. Yo mismo tiendo a la hipótesis de que el cerebro epileptófilo es un órgano funcionalmente o morfológicamente primitivo, tal vez atrasado en su desarrollo. Podría aducirse en favor de esta concepción el hecho de que el cerebro infantil reacciona de modo epiléptico con especial facilidad, y que el ataque epiléptico es un síntoma casi constante de ciertas enfermedades abioplásticas con formación de heterotopias del cerebro, como la esclerosis tuberosa. Otra consideración que posiblemente aboga en el mismo sentido, se funda en la comprobación de que hasta ahora no conocemos más que un solo genio indudablemente epiléptico: Dostoyevsky. Sea como fuere, la disposición epiléptica del cerebro no ofrece ningún punto accesible a nuestra intervención. Tenemos que buscarlo por otro lugar.

Dos posibilidades se presentan. Podemos tratar de evitar que se agreda al cerebro, vale decir: podemos arrancar la mano que quiere poner en marcha el mecanismo epiléptico. Podemos en segundo término tratar de disminuir la excitabilidad neuro-muscular, es decir, podemos sustraer al mecanismo epiléptico en función la transmisión

sobre la periferia. Esta segunda posibilidad me parece mucho menos valiosa que la primera. La influencia nociva del suceso epiléptico sobre el cerebro sigue siendo la misma, venga o no venga la convulsión muscular, trátese de grandes ataques o solamente de «vértigos». Hasta es posible que la convulsión muscular tenga una influencia favorable sobre el curso de la enfermedad. Ha sido notado varias veces, y por buenos observadores, que los casos con muchos vértigos tienen no raramente una mayor tendencia a la demencia que los casos con muchos ataques grandes. Felizmente la decisión sobre el camino a emprender está facilitada por el hecho notable (y, a mi modo de ver, no casual) de que las medidas terapéuticas que defienden al cerebro contra agresiones epileptógenas son frecuentemente capaces también de disminuir la excitabilidad neuromuscular (p. ej.: el calcio).

La agresión sobre el cerebro de que hablamos y que resolvimos combatir en primer lugar, ¿en qué consiste? Trataré de exponerlo, aunque conste, que a pesar de la enorme labor realizada, muchos detalles quedan aún en lo obscuro, de manera que la exposición siguiente tendrá, en parte por lo menos, carácter hipotético.

Para ilustrar la incertidumbre que en ciertas partes reina, solo diré que en cuanto al suceso fundamental neurofisiológico se defienden no menos que cinco teorías, de las cuales ninguna puede ser completamente rechazada: las teorías de *irritación*, de *desinhibición*, de *corto circuito*, de *descarga* y de *explosión*.

Felizmente disponemos de un gran material de comprobaciones absolutamente seguras e indiscutibles justamente en lo que concierne al suceso del ataque y al modo de ser del elemento agresor; de manera que por lo menos acá, donde no vamos a teoretizar, sino que tratamos de proponer un tratamiento útil, nos encontramos en tierra bastante firme.

En la figura 4 reproduzco un esquema de O. Wuth (1926), con el cual yo no me identificaría hasta el último detalle, pero que nos facilitará por lo menos una conclusión importante:

El ataque epiléptico representa evidentemente siempre el eslabón final de toda una cadena de causas y efectos; causas y efectos, que no solamente se relacionan hierárquicamente, sino que a veces también están coordinados, horizontalmente trabados.

Según mi opinión, el último eslabón de la cadena, la «causa final» de la descarga epiléptica, es una alteración más o menos repentina en el estado coloidal del cerebro, probablemente una quelificación (imbibición). Hay muchos argumentos en favor: entre otros, que mencionaré más tarde, el estallido súbito y la reversibilidad completa

de este grave trastorno cerebral; además, el aumento del volumen del cerebro, que ha sido observado durante el ataque por muchos autores (p. ej.: en el curso de una trepanación).

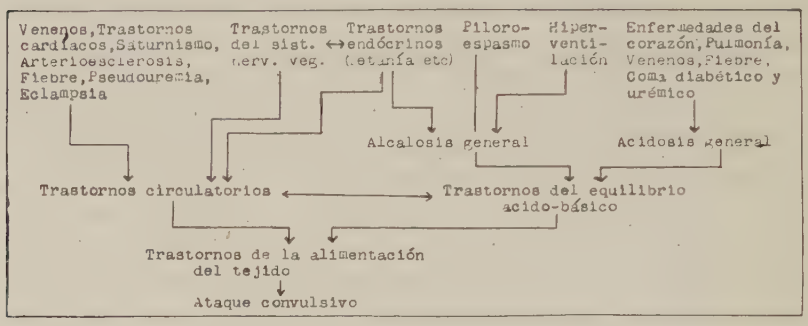


Fig. 4. - Esquema patogenético de *O. Wuth.*

Tal quelificación puede producirse bajo la acción de varias causas:

1° Por irritación directa (mecánica) del tejido cerebral.

2° Por un trastorno más o menos grave en el bilán del agua, o bien en el metabolismo mineral, cuya trabazón íntima con el bilán de los líquidos es ampliamente conocida.

3° Por una derivación de la reacción de los medios internos hacia el alcalosis. Este cambio, a su vez, favorece una retención de agua y quelificación, y daña a la alimentación de las células, disminuyendo, por ejemplo, la capacidad de disociación de la oxihemoglobina, con lo cual se reduce el aporte de oxígeno al tejido (Haldane).

4° Por un entorpecimiento de la llegada de oxígeno al organismo en general y, por lo tanto, al cerebro.

5° Por trastornos vasomotores de cierta intensidad, que producen también una deficiencia de oxígeno, deficiencia cuya consecuencia inmediata es una ligera acidificación del tejido, y que secundariamente —en una forma conocida hace mucho entre los investigadores de tal índole— provoca la quelificación.

¡Miremos un poco más detalladamente estos cinco caminos al ataque epiléptico! En el 1 mencionaremos en primer lugar los ataques epilépticos producidos por tumores cerebrales. He revisado ocasionalmente el material de la Clínica Neuropsiquiátrica de Munich con respecto a los ataques por neoplasma, y he podido comprobar que entre los individuos que habían tenido ataques a raíz de un tumor, no había ni uno solo sin imbibición del cerebro («Hirnschwellung» de Reichardt), según los protocolos de autopsia. El hecho indiscutible

de que tumores de crecimiento rápido causen más ataques que neoplasmas de evolución lenta, corresponde evidentemente a la frecuencia más o menos grande de imbibiciones en estas dos clases de neoformaciones. El estímulo directo (mecánico) favorece posiblemente también la producción de ataques epilépticos después de traumatismos cerebrales; pero seguramente habrá en esto también otros mecanismos, tal vez más importantes [1]. La importancia de los trastornos en el metabolismo del agua y de los minerales, mencionados en 2, es grande no solamente por sí, sino también por la repercusión de estos trastornos sobre la vasomotilidad y la reacción del medio interno. Mencionaré brevemente no más el significado del cloruro de sodio para el bilán de los líquidos. Se entiende que por vía metabolismo hidromineral pueden influir ciertas glándulas endócrinas: citaré la acción deshidratante de la secreción tiroidea. El alcalosis nombrado en 3, se produce p. ej. en la llamada «hiperventilación» (O. Foerster 1924). Hablando de alcalosis hay que añadir, que no se tratará por lo general, de una alcalinidad de la «reacción actual», sino solamente de una disminución de la reserva alcalina. Una de las causas principales de las muchas divergencias entre los investigadores, es indudablemente la negligencia de la importantísima diferencia entre acidosis y alcalosis actual y potencial. También aquí hay que recordar la influencia de las glándulas endócrinas: la deficiencia de secreción paratireoídea conduce notoriamente a la alcalosis (tetanía). La disminución del aporte de oxígeno, mencionada en 4, se realiza p. ej. al ahorcarse o ahogarse un individuo. Se sabe que en los dos casos aparecen convulsiones. Hay que insistir sobre el hecho de que el estímulo reside, en efecto, en la reducción del oxígeno y no, como podría suponerse, en el aumento del ácido carbónico. La inspiración de ácido carbónico conduce a la acidosis y tiene por lo tanto mas bien un efecto favorable (Fitz 1926, Sheldon 1927, Lennox 1928). Los trastornos vasomotores, citados en 5, son de importancia esencial para la génesis de ataques epilépticos. Mencionaré únicamente los casos más interesantes de epilepsia vasomotriz: los ataques a raíz de desangramiento, de ligaduras de las arterias cerebrales, de compresión de las arterias carótidas, de simpatectomía periarterial según Leriche, de saturnismo,

[1] Si el cerebro está francamente lesionado por el traumatismo, se puede considerar que esta lesión lo «primitiviza» y, por lo tanto, lo hace más accesible a la agresión epileptógena. En los casos sin lesión aguda, influye fuertemente la gravo irritación del sistema nervioso vascular, que causa hasta un traumatismo livian- (Ricker) y que, a su vez, (indirectamente, por trastorno vasomotor) puede conducir al ataque epiléptico.

arteriohipertonía, nefropatía etc. Hablaré en dos palabras del parentesco de lo epiléptico con los trastornos clasificados en el grupo de las «neurosis vasomotrices tróficas» (enfermedad de Raynaud, etc.). Por su acción sobre la vasomotilidad se explicará posiblemente también la influencia epileptógena de ciertas proteínas, que provocan ataques ya en cantidades minimas, sugiriendo así la existencia de una epilepsia, por así decir, anafiláctica, una sugestión, que dicho sea de paso, parece estar indicada también por otros fenómenos antes y después del ataque (Buscaino 1922).

Me parece probable que la acción epileptógena de emociones fuertes, por cierto raramente observada, y, sin embargo, indiscutible, obra también por intermedio de la vasomotilidad. He observado en el Asilo Suizo para Epilépticos en Zurich una joven que había tenido unos cuantos ataques entre los 8 y 12 años, y que después parecía curada. Esta chica terminó sus estudios en el colegio, se colocó, trabajó bien y finalmente se comprometió. A los 21 años, poco antes de casarse, recibió la noticia de que su novio había perecido en un accidente de tráfico. En la noche siguiente volvió a sufrir un ataque y desde entonces la joven quedó epiléptica con dos y tres ataques semanales. La enferma se caracterizaba por reacciones vasamotrices extremadamente acentuadas (rubor, palidez, transpiración, etc.).

La larga exposición hecha hasta aquí sobre el origen y la naturaleza de ataque epiléptico, se justificará teniendo en cuenta que sirve de fundamento para el sistema terapéutico de que vamos a tratar ahora. Vamos a discutir medida por medida, poniendo cada una en relación con la base teórica para convertir así el caos de las posibilidades en un edificio lógico y racional. Puesto que el modo de actuar de varias medidas permite interpretaciones distintas y que algunas parecen influir en varios lugares a la vez, estimo que el principio apropiado de clasificación no es la acción fisiológica, sino el modo de aplicación. Por lo tanto, trataremos consecutivamente las medidas *higiénicas*, las *dietéticas* y las *medicamentosas*. (1)

Si hablo en primer lugar de las *medidas higiénicas*, lo hago a propósito, puesto que aquí se trata de una clase de procedimientos, cuya

(1) Se entiende que ataques epilépticos p. ej. los causados por ciertos neoplasmas cerebrales necesitan un tratamiento especial (operativo). No entraré en detalles al respecto. Sin embargo, diré que la posibilidad de la existencia de un tumor motivará un exámen neurológico (muy a menudo también radiológico) muy escrupuloso frente a cualquier enfermo con ataques. En el acto de examinar se recordará siempre que los mismos ataques causan a veces ligeros síntomas focales, de manera que una insignificante diferencia de reflejos no podrá considerarse desde ya como indicación para la intervención quirúrgica.

importancia es difícil de exagerar y que, sin embargo, muy a menudo no encuentran el interés que merecen. En mi opinión, en cuanto a la higiene diaria no hay nada que no se tenga que puntualizar expresamente. El individuo común comete continuamente los más graves errores al respecto, y el médico tiene que dar órdenes concretas y detalladas, si desea una vida verdaderamente sana para su enfermo. Mas todavía que en otros casos se necesitan órdenes concretas y detalladas frente a un individuo epiléptico: aquí se trata casi siempre de personas lastimosas, muy a menudo de corta edad, no rara vez caprichosas y por todo esto casi siempre mimadas; de manera que sin la concisión exigida no se tomarían en muchos casos ni las precauciones básicas.

Una higiene escrupulosa se precisa especialmente para los epilépticos recientes. Una enfermedad epiléptica comienza muy rara vez con muchos ataques. Quien tratara un niño que haya tenido su primer ataque, o tres o cuatro durante un año, con dosis altas de barbitúricos o bromuros, dispararía, a mi modo de ver, cañonazos para matar un chingolo, sin hablar del peligro de inflingir al cerebro juvenil un daño con esta medicación grosera, más grave tal vez del que sufriría por los mismos ataques.

La primera exigencia y la que menos se cumple en general, desgraciadamente, tiende a establecer una regularidad estricta en la vida del enfermo. Hay que considerar cada epiléptico como constitucionalmente lábil y, por lo tanto, dispuesto a responder a pequeñas desviaciones del orden acostumbrado con grandes desequilibrios capaces de provocar ataques. Estoy convencido de que la conocida pedantería de los epilépticos avanzados no es otra cosa que una actitud de protección, adoptada inconscientemente por el enfermo para excluir en lo posible sorpresas físicas y psíquicas. Me parece probable que la mejoría que se nota a veces en epilépticos recién internados en un asilo sea debida en gran parte a la mayor regularidad de la vida de hospital. Será, por lo tanto, obligación del médico velar por la regularidad de las comidas, del cambio entre actividad y reposo, vigilia y sueño, etc. Grandes esfuerzos físicos que dejan al enfermo sin aliento y, por lo tanto, lo hiperventilan y lo hacen alcalósico, deben ser evitados a toda costa. Parecen favorables, en cambio, los ejercicios físicos moderados, que por los productos catabólicos de la actividad muscular acidifican al enfermo. Los baños muy fríos y muy calientes son nocivos a causa de su fuerte acción sobre la vasomotilidad. Es de gran importancia proveer al enfermo de un abasto suficiente, y hasta copioso,

de oxígeno; con otras palabras: el epiléptico no debe permanecer continuamente en la casa, sino que debe salir frecuentemente a tomar aire fresco. Hay que observar y regularizar la digestión de los epilépticos, no solamente porque sufren muy amenudo de constipación, sino también teniendo en cuenta la posibilidad de autointoxicaciones intestinales. Me parece oportuno intercalar mensualmente un día de purga, durante el cual el enfermo debe permanecer en ayunas. (Sobre el significado del ayuno para los epilépticos véase más abajo). Puesto que los ataques suelen acumularse en las horas de la madrugada (véase figura 5) puede ser provechoso dejar al enfermo en cama hasta las 9 ó 10 de la mañana.

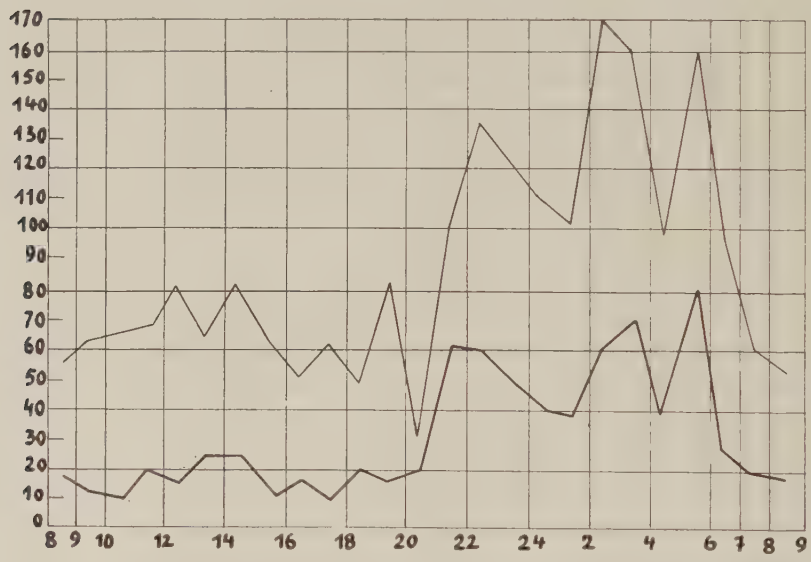


Fig. 5. - Distribución sobre el día de 760 ataques convulsivos (abajo) y 2141 vértigos (arriba), observados en 40 enfermos durante ocho meses (*Gatlus*).

En algunos casos muy obstinados ví resultados halagüeños manteniendo al enfermo en cama durante varias semanas. La tranquilidad psíquica ayuda mucho al tratamiento. Es obtenida, no solo de modo pasivo, alejando las emociones fuertes, sino también activamente por medio de una psicoterapia tranquilizadora.

Sobre la importancia de las *medidas dietéticas* en el tratamiento de los epilépticos ya habló Hipócrates. Dice en su tratado sobre la epilepsia: «Mas quienquiera conozca este cambio en el hombre y pueda por régimen hacer a este hombre húmedo y seco, caliente y frío, po-

dría también curar esta enfermedad». Así la alimentación siempre ha sido usada como remedio para los epilépticos; muchas veces por cierto sin criterio bien preciso y de un modo netamente empírico, llegando así infaliblemente a hacer la vida del enfermo muy desagradable, sin obtener siempre el efecto curativo correspondiente.

Al prescribir la dieta es necesario individualizar en lo posible. Sin embargo, hay algunas reglas generales.

El epiléptico debe abstenerse completamente de las bebidas alcohólicas. Tiene que evitar manjares muy condimentados. En cuanto al café y al té conviene mayor liberalidad; el café resulta hasta favoraleb en algunos casos.

Muy provechoso es en todos los casos restringir el consumo de líquidos. No solamente hay que pensar en las bebidas, sino que deben suprimirse también las sopas. Regulando así el bilán de agua del organismo, disponemos sin duda de un medio dietético especialmente sencillo y eficaz a la vez para combatir los ataques. Es sabido desde hace mucho que en los epilépticos se encuentran trastornos de esta índole (Rohde 1908, Allers 1912, Frisch y Walter 1922): el epiléptico aumenta de peso antes del ataque; simultáneamente es oligúrico; después del ataque se nota un fuerte derramamiento de líquido; simultáneamente baja de peso. He tratado de provocar ataques en personas epilépticas por la administración de golpes de una fuerte cantidad de agua («Wasserstoss», «golpe de agua»), completamente inofensiva para un individuo normal, y tuve resultados positivos en varios casos. Estudios análogos han sido publicados por Mc Quarrie y Peeler (1931), quienes provocaron ataques administrando la hormona antidiurética del lóbulo posterior de la hipófisis (Pitressin). El contenido ep agua del organismo influye evidentemente en dos sentidos: con respecto a la fisiología celular y en relación con los sucesos hemodinámicos y vasomotores. Teniendo en cuenta estas circunstancias, conocedores de los problemas de la epilepsia han restringido desde mucho tiempo el consumo de líquidos. La prueba concluyente fué aportada por T. Fay (1929), Mc Quarrie y su escuela (Engel, Mc Quarrie y Ziegler, 1934) y otros autores, sobre todo norteamericanos. Una deshidratación análoga se efectúa también por la reducción del cloruro de sodio en los alimentos, tal como ha sido preconizada por Richet y Toulouse (1900). No será necesario insistir mucho sobre este tratamiento tan conocido. Se sabe que el metabolismo del cloruro de sodio está íntimamente ligado al bilán de agua y que la capacidad de los tejidos de enriquecerse en agua depende en gran escala del aporte de cloruro de sodio al organismo. Quisiera recalcar la necesidad de

no contentarse con la simple prescripción de reducir la sal, sino de enseñar simultáneamente al enfermo y a su familia, como deben proceder para hacer la comida dietética apetitosa a la vez. Es una antigua experiencia que sin esta preocupación gastronómica del médico el enfermo no se abstiene de la sal más que una semana, declarándose después abiertamente en huelga, o, peor aún, salándose las comidas clandestinamente.

Según el estado actual de nuestros conocimientos no hay motivo alguno para hacer lo que muchos médicos consideran la primera regla en la dietética de los epilépticos: prohibir la carne o las proteínas animales en general. Puede estar justificado el restringir la carne en ayuda de una dietética deshidratante (escasa en cloruro de sodio).

Habiendo epilépticos que son hipersensibles para ciertas categorías de proteínas en un grado hasta anafiláctico, será conveniente fijarse si no hay relaciones estrictas entre el consumo de ciertos manjares y la aparición de ataques.

Pagniez (1929) relata el caso de un muchacho epiléptico de 13 años, que tenía sus ataques curiosamente siempre los domingos por la mañana. El análisis de las condiciones demostró que el enfermo tomaba chocolate como desayuno dominical. Al suprimirlo, cesaron por completo los ataques. Yo conozco un caso análogo en el cual la proteína de huevos asumía el papel de agente provocador. Tratábase también de un niño. La supresión radical de los huevos causó un intervalo libre de varios meses. El comer de un solo huevo duro provocó de inmediato otro ataque.

Se entiende que la supresión de un alimento determinado no debe hacerse sin pruebas concluyentes acerca de su nocividad. Conviene, por lo tanto, en ciertos casos, hacer cutireacciones diagnósticas con una serie de substancias proteícas sospechosas. Hay que agregar que las investigaciones respectivas no están aun terminadas.

De las dietas especiales mencionaré aquí: el *régimen azucarado*, la *dieta de ayuno*, y el régimen de carne y grasas o *régimen cetógeno*.

El régimen azucarado, nuevamente propuesto por Wladyczko (1925), se justifica con la observación de que algunos epilépticos acusan hipoglucemias antes del ataque, y sobre todo con el hecho de que la inyección de insulina provoca a veces ataques convulsivos. Se recomienda, por consiguiente, la administración de una dosis de 250 gramos de azúcar por día en combinación con la comida común. El modo de actuar de este régimen no está suficientemente esclarecido Un aporte fuerte de hidratos de carbono altera seguramente el equilibrio iónico. Muy probablemente se conseguirá también una cierta

deshidratación: se sabe que la inyección de soluciones hipertónicas de glucosa deshidrata enérgicamente, acción que discutiremos luego al hablar del tratamiento del estado de mal. Sin embargo, me parece que el régimen azucarado debería limitarse estrictamente a los casos en que esté irrefutablemente probada la hipoglucemia antes del ataque. Para los demás casos será mejor prescindir de ella.

La dieta de ayuno y el régimen de carne y grasas actúan ambos en primer lugar produciendo acidosis (cetosis). Por la dieta de ayuno se obtiene además una pérdida grande de líquidos: se sabe que en los hambrientos la cantidad de sangre p. ej. disminuye considerablemente.

En la dieta de ayuno preconizada por A. Marie y Guelpa (1911), Geyelin (1921) y otros autores, sobre todo norteamericanos, el modo de proceder es muy sencillo. Se da al enfermo nada más que 1 1/2 a 2 litros de agua por día, y esto durante dos a tres semanas. No recibiendo ninguna alimentación verdadera, el organismo está obligado a comerse a sí mismo, lo que no significaría otra cosa que un régimen exclusivo de carne y grasas. Describir el procedimiento equivale a indicar que se trata de algo muy desagradable para el enfermo y seguramente muy difícil para quienes lo rodean. La dieta de ayuno se aplicará, por lo tanto, raramente, tanto más cuanto que disponemos en el régimen de carne y grasas de un método de igual eficacia y de ejecución más fácil.

Este régimen cetónico fué introducido en el tesoro terapéutico por la escuela de Mayo (Wilder 1921, Petermann 1924). La cura se inicia con una semana de ayuno. Después el enfermo recibe una alimentación que se calcula a base de 77 calorías por kilogramo del propio peso y en el cual la grasa predomina de tal modo, que constituye el doble, triple o cuadruple de los hidratos de carbono y de las proteínas juntamente (según Petermann p. ej. 15 gramos de hidrato de carbono, 25 gr. de proteína, 180 gr. de grasa). Para evitar indigestiones se recomienda dar al principio algo más de hidratos de carbono y algo menos de grasa y cambiar lenta y paulatinamente la proporción en favor de las grasas. Habiendo obtenido un intervalo sin ataques de 3 a 4 meses, se puede atenuar la dieta, dando mensualmente 5 gr. más de proteínas o hidratos de carbono y reduciendo más despacio aun la cantidad de grasas. Cada recaída será motivo de volver a hacer más riguroso el régimen. Es claro que así pueden transcurrir años antes de que se pueda dar por terminado el tratamiento. Esto y la necesidad de ejecutarlo, por lo menos en parte y sobre todo en el comienzo, intramuros del hospital dificulta considerablemente la aplicación. Sin embargo, hay casos recientes con muchos ataques

para los cuales, a pesar de la paciencia que precisa y del dinero que cuesta, es el tratamiento de elección. Es una lástima que no sirva en igual escala para los adultos que para los niños. En los primeros el equilibrio iónico está demasiado protegido, de manera que es difícil llegar a una acidosis fuerte y prolongada. En los niños innegablemente los resultados son muy halagüeños: de 160 enfermos tratados con dieta cetógena en la clínica de Mayo se curaron 36 % y mejoraron 21 % (Helmholz y Keith 1933).

El primer lugar entre las *medidas medicamentosas* merece sin duda la prescripción del ácido etilfenilbarbitúrico (luminal, gardenal), propuesta en 1912 por Kino y Hauptmann. Hay que empezar con un decígramo por día, aumentando la dosis paulatinamente, hasta llegar a 3 a 4 decígramos. Desaparecidos los ataques, se retrocede muy despacio para encontrar el umbral. La dosis permanente se hallará 1/2 decígramo por encima de la cantidad eficaz. La usual repartición esquemática de la dosis diaria en 3 porciones iguales no me parece recomendable. También aquí hay que individualizar; p. ej. a un enfermo que tiene sus ataques sobre todo de noche, se le da la mayor parte antes de acostarse. En lo que toca a la repartición durante el día, opino que la administración de muchas porciones pequeñas (p. ej. en forma de luminaletas) tiene más eficacia que la de pocas dosis grandes. El argumento principal para esta recomendación es que, según todo parecer, el ácido etilfenilbarbitúrico no actúa, como muchos suponen, ante todo en calidad de narcótico. O. Wuth (1930) insiste muy justificadamente en que el medicamento actúa con frecuencia favorablemente ya en dosis pequeñísimas, seguramente no narcóticas; que en los casos refractarios ni siquiera un aumento muy fuerte de la dosis disminuye el número de ataques; y, finalmente, que los epilépticos librados de ataques por los barbitúricos no pueden, de ningún modo, considerarse narcotizados. Tenemos motivo para suponer que el ácido etilfenilbarbitúrico actúa contra los ataques sobre todo por el efecto tranquilizador que tiene sobre el sistema vascular.

Se sabe que este medicamento sirve para el tratamiento de un sinnúmero de trastornos vasomotores; p. ej. se usa mucho en los hipertónicos esenciales. Su modo de influir en la arteriohipertonía ha sido demostrado en forma muy linda por F. Lange (1930). Este autor ideó un método que permite juzgar el grado de excitabilidad vasomotriz, método, en el cual se observa la corriente capilar en la ranura de las uñas y se mide el tiempo que transcurre entre la supresión de la corriente sanguínea en el brazo y el paro total de la corriente capilar en el lugar observado. Como se ve en la figura 6, la reacción hipertónica no es solamente exagerada, sino también paradojal (bajo la acción del

calor, prolongación; bajo la acción del frío, reducción del tiempo medido). Basta suministrar luminal para normalizar completamente la curva, o, mejor

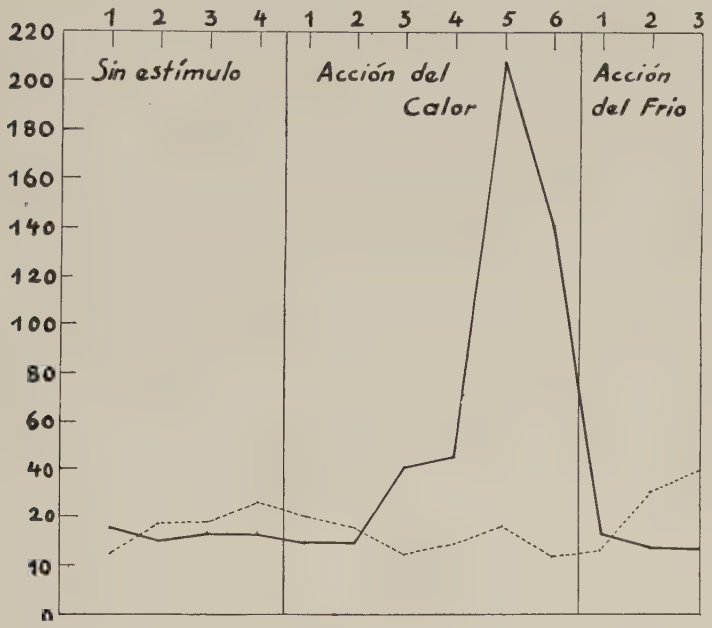


Fig. 6. - Experimento de *Lange*: ——— Sin luminal 27-1-1930.
····· Con luminal 28-1-1930.

dicho, la reacción vascular que en ella se traduce. Partiendo de la hipótesis de que en muchos epilépticos existe también una hiperexcitabilidad vasomotriz,

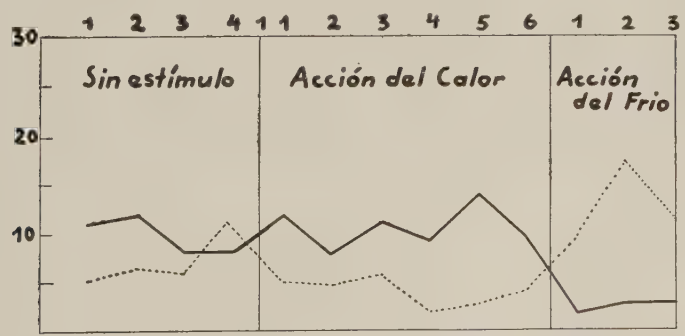


Fig. 7. - Experimento propio: ——— Sin luminal 9-3-32.
Con luminal 15-3-32.

he examinado una serie de epilépticos con el método de Lange. En la figura 7 reproduzco una curva, tomada de esta serie de observaciones aún no publica-

das, curva, que demuestra claramente su parentesco con la de Lange, aunque moviéndose sobre un nivel más bajo (1).

Es sabido que ciertos individuos no toleran el ácido etilfenilbarbitúrico, reaccionando a su administración con eritemas y fiebre. En casos de esta índole hay que interrumpir la medicación y hacer más tarde un nuevo ensayo, que a veces resulta más favorable. Una administración continua de dosis altas conduce a veces a intoxicaciones barbitúricas, cuya sintomatología no podemos describir aquí. En tales casos hay que suprimir el medicamento por completo, teniendo en cuenta que no se debe abandonar rápidamente por el inminente peligro del estado de mal.

Este peligro existe por supuesto también para los enfermos que no se atienen a su prescripción y abandonan el medicamento de un día a otro, p. ej. por habérseles agotado durante un viaje. Conviene, por lo tanto, combinar el ácido etilfenilbarbitúrico siempre que se pueda con un medicamento de mayor tendencia a la acumulación en el organismo y que pueda servir de última reserva antiepiléptica: el bromuro.

El modo de actuar del tratamiento bromúrico no está aun completamente esclarecido. Indudablemente es de alguna importancia que los iones bromuro expulsen del organismo a los iones cloruro, y que este cambio en el metabolismo mineral tenga influencia sobre el bilán de agua. Consta, sin embargo, que el bromuro actúa además en forma específica sobre las células de la corteza cerebral. Conviene empezar el tratamiento con 1 gr. diario, aumentándolo gradualmente hasta 5 y 6 gramos, para después disminuir la dosis hasta algo por encima de la cantidad eficaz. La forma más agradable de suministrar el bromuro constituye el sedobrol, introducido en 1912 por Ulrich de Zurich. El sedobrol se fabrica en cubitos, que corresponden cada uno a un gramo de bromuro de sodio y que, diluídos en agua caliente, dan una sopa apetitosa, debido a las substancias extractivas vegetales contenidas en los cubitos.

Desgraciadamente el tratamiento bromúrico es de aplicación bastante complicada. Prescribir bromuros sin regular simultáneamente el

(1) El parentesco patofisiológico entre arteriohipertonía y epilepsia, indicado por mí ya en 1932, ha sido comprobado últimamente (1934) por Marx y Weber. Estos autores encontraron en la sangre de epilépticos, inmediatamente antes del ataque, grandes cantidades de substancias vasoactivas del mismo tipo como se hallan en la sangre de los hipertensos. Después del ataque y en el intervalo libre no se identificaron tales substancias.

aporte de cloruros equivale a ejecutar una operación quirúrgica en la obscuridad. No se sabe lo que se hace: «No tiene ningún sentido prescribir dosis precisas de bromuro a un enfermo que toma cantidades variables de sal; si se le permite tomar sal a capricho, se le podría igualmente permitir tomar el bromuro en las cantidades que guste» (O. Wuth). Para concebir esto hay que recordar que los halógenos se conducen en el organismo como antagonistas. Los iones se expulsan mutuamente, vale decir, no solamente el cloruro al bromuro, sino también viceversa. El contenido del organismo en cloruros y bromuros respectivamente, corresponde siempre a la proporción de los dos halógenos en la alimentación (y medicación). Quedando iguales las respectivas dosis, se establece en el organismo un estado de equilibrio; vale decir, el ión cloruro y el ión bromuro quedan constantemente en la misma porporción con respecto a la totalidad de los alógenos del organismo. Cambiando el aporte, sea del uno o del otro, el organismo queda obligado a buscarse un nuevo equilibrio. Por consiguiente, un tratamiento realmente racional exige ir acompañado de una serie de exámenes de la sangre o de la orina, de tal modo que primero se comprueba el nivel óptimo de bromuros para el enfermo tratado y después se confirma cada una o dos semanas el mantenimiento de ese nivel.

Para este análisis se empleará con provecho el método del cloruro de oro indicado por Walter y modificado por Wuth. Se precisan para el examen soluciones patrón de 50 a 300 mg. % contenido de bromuro. A cada 5 cm^3 de solución de bromuro de sodio se agrega 1 cm^3 de ácido tricloracético al 20 % y 4 cm^3 de cloruro de oro amarillo al 1/2 %. La serie de tubitos de color distinto que así se obtiene, debe quedar en la obscuridad para que siga siendo utilizable durante algunas semanas. Si se quiere medir el contenido bromúrico de una orina hay que diluirla primero con agua destilada 1: 3. Luego se agregan a 10 cm^3 de esta dilución 15 centigramos de carbón animal finísimo; se agita bien y se filtra por un filtro liso. A 5 cm^3 de filtrado se agrega (igual como a la solución patrón) 1 cm^3 de ácido tricloracético y 4 cm^3 de cloruro de oro amarillo. Una vez mezclados bien los líquidos, se compara el color de la prueba examinada con el de la serie patrón.

El bromuro también causa intoxicaciones si se lo toma durante mucho tiempo en dosis altas. Hay que saber que la sensibilidad frente a este medicamento cambia mucho de individuo a individuo. El tratamiento de la intoxicación es sencillisimo, puesto que es suficiente dar un poco más de cloruro de sodio con los alimentos para eliminar del organismo la cantidad deseada de bromuro.

Al lado de los dos medicamentos clásicos arriba mencionados se han recomendado muchos otros.

A veces es provechoso prescribir substancias deshidratantes. La purgación necesaria o el «día de purga» arriba mencionado se ejecutarán, por lo tanto, con sulfato de sodio o magnesio. La eficacia del calcio, cuya acción desquelificante se conoce y que además favorece la aparición de una acidosis, se fundará, al menos en parte, con seguridad sobre su efecto deshidratante. Se prescribe calcio láctico o calcio Sandoz en dosis de 5 a 10 gramos diarios. La influencia favorable de la cafeína y teobromina se basa probablemente en primer lugar en la acción diurética que a estos medicamentos corresponde. A veces se obtienen resultados brillantes con la administración de preparaciones de mercurio como Novasurol, Salyrgan y otros, sobre todo si el enfermo se halla simultáneamente acidificado (véase más abajo). Es notable que el efecto favorable del mercurio ha sido experimentado empíricamente hace ya mucho por Muskens, sin que este autor haya podido dar una explicación satisfactoria del fenómeno.

Otro grupo de medicamentos debe su efecto favorable a su capacidad de producir acidosis. Usanse con tal finalidad los ácidos clorhídrico, sulfúrico y fosfórico. Actualmente se recomienda sobre todo el cloruro y el nitrato de amonio, tomados en 3 dosis diarias de 4 a 6 gramos. Conviene mucho administrar substancias acidificantes, ya que estas facilitan considerablemente la deshidratación. Se entiende que la inhalación de una atmósfera rica en ácido carbónico, siempre que contuviera mucho oxígeno, constituiría un tratamiento especialmente eficaz. Lástima es que las dificultades técnicas de semejante procedimiento sean demasiado grandes. Sin embargo, estoy convencido de que el buen efecto de baños de ácido carbónico, varias veces observado por mí, se debe no solo a la acción del baño sobre los vasos cutáneos, sino también a la respiración simultánea de ácido carbónico.

El tratamiento por el borotartrato de sodio o potasio, introducido con el nombre de tratamiento bórico por P. Marie, Crouzon y Bouttier en 1920, es posiblemente también un tratamiento por acidificación. El bórax y el ácido bórico disminuyen el grado de explotación de los alimentos y aumentan la combustión de las grasas. Según experimentos recientes de C. Maier tienen además un efecto deshidratante. Por mi parte, nunca he visto un éxito franco obtenido con este tratamiento.

La administración de medicamentos cardíacos como la digital y el estrofanto se recomienda sobre todo en obras antiguas. Ultimamente ha sido bastante desatendida. No cabe duda, sin embargo, de que

estas substancias, al emparejar las condiciones circulatorias, contribuyen a veces muy eficazmente a la disminución de la hiperexitabilidad vasomotriz de muchos epilépticos. Tiene un efecto análogo la acetilcolina que disminuye la presión sanguínea y cuya eficacia como antiepiléptico ha sido comprobada por varios autores franceses e italianos (Bolsi, Aschieri y otros).

Han sido recomendadas en varias oportunidades la belladona, la atropina, el opio y otros alcaloides. Me parece tán difícil formarse un criterio sobre su acción que no puedo considerar su uso recomendable. Aproximadamente lo mismo diría sobre el tratamiento con tiroidina, preconizado en 1913 por el médico holandés Bolten. En los últimos años y siguiendo las últimas modas en medicina, se ha ensayado también tratar a los epilépticos con piretoterapia (inyección de proteínas ajenas, leche, etc.) y con hormonas circulatorias (padutina etc.). Según los respectivos autores se obtuvieron con estos métodos ciertos éxitos. Sin embargo, conviene una actitud algo reservada al respecto, puesto que cada conocedor de la epilepsia sabe demasiado bien en que escala el ritmo de los trastornos epilépticos está influído a veces por cambios hasta minúsculos en las condiciones vitales.

Para ilustrar esta última experiencia recordaré el hecho conocido de que cualquier intervención quirúrgica, en cualquier parte del organismo, causa a veces una cesación de los ataques durante algunas semanas. Se entiende que los ataques desaparecen transitoriamente también después de intervenciones sobre el cráneo. De ahí proviene la opinión de algunos cirujanos en cuanto al supuesto efecto curativo de la trepanación decompresiva en epilépticos sin proceso tumoral en el cráneo.

Finalmente algunas palabras sobre el *tratamiento del estado de mal*. Para este se precisan reglas especiales, puesto que existe un peligro inmediato y que muchas medidas no se pueden tomar, por no permitirlo las condiciones físicas del enfermo.

En principio se pueden encarar tres caminos: Como sabemos que durante el estado de mal el cerebro aumenta de volumen y, por lo tanto, se halla comprimido en la cápsula craneal, se puede tratar de descomprimirlo haciendo una punción lumbar y sacando gran cantidad de líquido cefalorraquídeo. En segundo lugar se puede intentar deshidratar el cerebro inyectando solución hipertónica de glucosa o solución de calcio (calcio Sandoz). La tercera posibilidad es la de narcotizar el cerebro mediante la inyección intravenosa de somnífeno, dándole así el tiempo necesario para reponerse. Este último procedimiento es el de elección hoy en día. La aplicación es sencillísima;

se inyectan muy lentamente en la vena, según el peso del enfermo, de 2 a 4 cm^3, con lo cual los ataques desaparecen en general de golpe o, por lo menos, dentro de pocos minutos. Si es necesario, la inyección puede repetirse. Pero no conviene dar más de 10 cm^3 dentro de las 24 horas (1).

Hablando del tratamiento del estado de mal, quisiera repetir que, en vista de la cantidad de insulina administrada hoy en día, cada estado de mal debe despertar la sospecha de convulsiones hipoglucémicas. Por lo tanto, siempre será indicado examinar la glucemia si el médico se halla ante un enfermo con estado de mal sin disponer de suficientes datos anamnésicos. El tratamiento de las convulsiones hipoglucémicas es sencillísimo y sumamente eficaz: bastan algunas inyecciones intravenosas de 10 cm^3 de solución de glucosa al 25 % y 1 a 2 litros de solución de glucosa al 5 % en clisma. Si entre 20 o 50 casos de estado de mal se descubre uno solo con hipoglucemia, la labor de los innecesarios exámenes de sangre se hallará ampliamente recompensada.

El tamaño de esta exposición y la cantidad de medidas propuestas demuestran mejor que muchas palabras que aún no existe la panacea contra el ataque epiléptico. Hablando francamente, no creo que se hallará jamás. Más bien soy de opinión de que los futuros progresos en el tratamiento de los epilépticos se obtendrán de igual manera que los obtenidos hasta ahora: una penetración cada vez más profunda en el origen y la esencia de los fenómenos epilépticos nos permitirá individualizar nuestra actuación en mayor escala aún. Cuanto más profundamente penetramos, tanto más cariño y diligencia exige el caso individual; y tanto más comprendemos la sabiduría de la frase pronunciada hace más de dos siglos por el famoso médico holandés Boerhaave: «Epilepsia mirabilis morbus ille».

BIBLIOGRAFIA

Hasta 1928 consúltese:

W. Lennox and St. Cobb: *Epilepsy* (Baillière, Tindall y Cox, London 1928).

Publicaciones posteriores citadas en este trabajo:

Aschieri, G.: *L'acetilcolina nella terapia dell'epilessia.* Note Psichiatr. 63, 25 (1934).

Bolsi, D.: *Sur le rôle des spasmes vasculaires dans la pathogénie des accès épileptiques.* Revue neurol. 39, 1321 (1932).

Engel, R., F. Mc. Quarrie und M. Ziegler: *Mineralhaushaltstudien bei jugendl. Epileptikern.* Arch. exp. Path. 174, 555 (1934).

(1) Ultimamente la punción ha sido complementada por la insuflación de aire, procedimiento que parece mejorar los resultados (L. Guttmann).

FAY, T.: *Some factors in the «mechanical theory of epilepsy», etc.* Amer. Journ. Psychiatry 8, 783 (1929).

GUTTMANN, L.: *Pathophysiologische, pathohistologische und chirurgisch-therapeutische Erfahrungen bei Epileptikern.* Z. Neur. 136, 1 (1931).

HELMHOLZ, H. F. and H. M. KEITH: *Ten year's experience in the treatment of epilepsy with ketogenic diet.* Arch. of Neur. 29, 808 (1932).

KRAPF, E.: *Ueber Spaetepilepsie.* Arch. f. Psychiatr. 97, 323 (1932).

LANGE, F.: *Therapeutische Beeinflussung der Hypertonie, etc.* Verh. dtsch. Ges. f. inn. Med. 42, 227 (1930).

MC. QUARRIE, F. and D. B. PEELER: *The effects of sustained pituitary antidiuresis and forced water drinking in epileptic children.* Journ. Clin. Invest. 10, 915 (1934).

MAIER, C.: *Pharmakologische Untersuchungen über die Grundlagen der Bortherapie bei Epilepsie.* Mschr. f. Psychiatr. 91, 41 (1935).

MARX, H. und P. WEBER: *Zur Pathogenese des epileptischen Anfalls.* Nervenarzt 7, 183 (1934).

PAGNIEZ, PH.: *L'épilepsie.* (Masson et Cie., París 1929).

WUTH, O.: *Die medikamentoese und diaetetische Behandlung der Epilepsie.* Fortschr. Neurol. 2, 459 (1930).

WUTH, O. und A. HENNICKE: *Weitere Grundlagen zur Bromtherapie.* Z. Neur. 145, 721 (1933).

NOTICIARIO

Por E. R.

A fines de Febrero, ha vuelto a ser escalado el Aconcagua por el explorador y alpinista alemán Hans Link; aparte del interés que tienen hazañas de esta clase desde un punto de vista meramente deportivo, queda siempre después de cada expedición al famoso macizo andino, algunos nuevos conocimientos útiles para la geografía: en el caso presente, se han estudiado además varios detalles meteorológicos de la región y en especial las corrientes de aire a fin de establecer hasta qué punto y en qué condiciones es posible el vuelo en planeadores sobre esta parte de la cordillera.

⁂

El Ministerio de Agricultura, ha informado en el pasado mes de Marzo, que en la Escuela Agrícola de Las Delicias (Entre Ríos), se ha dado término a una serie de trabajos de selección de semillas, iniciados en 1926, y con los cuales se consiguió crear en aquel establecimiento una nueva variedad de linos, que da altos rendimientos, representando este resultado un nuevo triunfo de la genética argentina.

El nuevo lino ha sido inscrito en los registros con el nombre de «lino H. 39, selección Delicias M. A.».

La nueva variedad creada procede de una hibridación entre lineta de flor blanca y lino francés « gross-grain », tipos que fueron elegidos como puntos de origen teniendo en cuenta la resistencia de la primera a las enfermedades y la vigorosa fuerza de crecimiento del segundo. Es de flores blancas y grano grueso, y con un rendimiento de 1800 kilos por hectárea, deducido de la producción recogida en 24 hectáreas, en campos de Entre Ríos.

La sección Fitotécnica ha ensayado ya el nuevo lino en 17 localidades diferentes, comparándolo con otras 20 variedades distintas de linos y linetas, y comprobando en todos los casos la superioridad del nuevo tipo.

⁂

En nota dirigida al ministro de Gobierno de Córdoba por el director del Museo Provincial de Ciencias Naturales Dr. Juan Olsacher, se informa acerca de las excursiones científicas que se acaban de realizar por la falda oriental de la Sierra Grande, de la provincia, con fines de investigación sobre su constitución geológica.

Expresa en su comunicación que en viajes hechos en enero y febrero últimos en la llanura del oeste de la sierra de Pocho y al pie de ésta, en la cuesta Jatán, se encontraron interesantes formaciones. Y añade que ha sido un descubrimiento de mucho interés, pues se ha logrado la ubicación cronológica de otros depósitos sedimentarios, de edad dudosa hasta ahora (areniscas de Sampacho, cerro Colorado, sierra del Anti, etcétera).

Al sur de Nono, dice después, se recogieron algunos fragmentos de fósiles del pampeano, entre ellos restos correspondiente a gliptodontes, los que se han traído para su clasificación y exhibición en el museo, por ser de gran interés paleontológico. En las proximidades del mismo lugar se pudo establecer la existencia de un paradero indígena.

Se informa más adelante que a fines del verano pasado se realizaron varios viajes de estudios por diversas regiones de Calamuchita, con el propósito de estudiar los yacimientos de serpentina de El Pantanillo, que son interesantes desde el punto de vista geológico y de los cuales se tenían pocas informaciones.

Todo ese material mineralógico, petrográfico y geológico se exhibe en las secciones correspondientes del museo y se han tomado observaciones que serán consignadas en la « Geología de Córdoba », que editará el mismo.

En otra nota del doctor Olsacher insiste en pedir a las autoridades que se adopten medidas a fin de proteger las pictografías del cerro Colorado, en donde la afluencia de turistas despreocupados, las inscripciones que los mismos realizan y, en algunos casos, los deterioros ocasionados por la falta de comprensión de determinados visitantes, pueden llegar a comprometer el valor histórico del referido monumento arqueológico.

⁂

El Ministerio de Agricultura de la Nación ha dispuesto extender, en el presente año, el procedimiento adoptado en los dos últimos, para combatir la langosta, consistente en el espolvoreo con arsenito de sodio.

Este procedimiento destructivo fué adoptado después de haberse establecido que la langosta voladora se reproduce, precisamente, en la zona donde causa sus estragos, regresando hacia el norte en el otoño; pasa el invierno en constante movimiento y vuelve en la primavera hacia el sur.

Establecido que la langosta nace y muere dentro del territorio de nuestro país, su persecución quedó reducida a un problema nacional.

Los anteriores ensayos tuvieron resultados muy satisfactorios, y ello ha inducido al Ministerio a aplicar el procedimiento en mayor escala. Se aprovecharán los grandes fríos en el norte, momento en que las mangas están semialetargadas, para diezmarlas en todos los lugares donde puedan funcionar las máquinas espolvoreadoras.

⁂

A mediados del mes de mayo próximo pasado se informó desde San Cristóbal que había surgido mineral de petróleo de las perforaciones que realiza la Dirección de los Yacimientos Petrolíferos Fiscales. Con tal motivo se destacó un técnico que recogió muestras del líquido para ser analizado. En un reciente informe se hace saber que las muestras eran pequeñas can-

tidades de petróleo con algunas burbujas de gas desprendidas de la perforación, no obstante haber sido llenado el foso cuidadosamente, hecho sucedido en situaciones análogas en otros pozos, pero sin importancia. Para aclarar debidamente el origen del mineral extraído, en los últimos días de mayo, fueron realizadas experiencias con una máquina portátil para estudios geofísicos, extrayéndose agua acompañada con algunas manchas de petróleo. Los resultados de estas perforaciones y las conclusiones de los análisis, constituyen un incentivo para proseguir los trabajos que la dependencia realiza en esta zona.

Finalmente, la Dirección de los Yacimientos Petrolíferos prepara un plan para realizar sondajes eléctricos en el pozo de San Cristóbal como última tentativa antes de abandonar los trabajos de perforación.

* * *

El Presidente de la Comisión Meteorológica Internacional señor Th. Hessenberg, comunicó en el mes de junio que, de acuerdo con una resolución de la primera Conferencia Sudamericana de Meteorología y Servicios Radioeléctricos, celebrada en 1935 en Río de Janeiro, el comité internacional ha oficializado la constitución de la comisión regional de la América del Sur, con fecha 1º de mayo último.

Agrega la comunicación que el comité indicado ha nombrado presidente de esa comisión al ingeniero Alfredo G. Galmarini, director de Meteorología, en su carácter de miembro del comité del ramo internacional y vicepresidente de las subcomisiones técnicas del indicado organismo.

Esta comisión regional es la tercera formada por el comité meteorológico internacional, de acuerdo con la resolución 116 de la conferencia de directores reunida en Varsovia en septiembre del año próximo pasado. La comisión regional I es la de Africa y la comisión regional II corresponde al Extremo Oriente (Asia), presidida por el profesor Dr. M. Bruzón. Ejerce la presidencia de la comisión regional I de Africa el profesor A. Walter.

Incumbe a estas comisiones regionales la tarea de la organización meteorológica de sus respectivos continentes, resolviendo todos los problemas relativos a dicha finalidad, y en especial el intercambio, centralización y difusión de informaciones meteorológicas para los fines sinópticos y de la acronáutica.

El primer problema a que está abocada esta nueva comisión sudamericana es el de resolver la distribución de los números indicativos de las estaciones meteorológicas de la América del Sur, de acuerdo con las normas establecidas en los demás continentes. En ese sentido, la subcomisión internacional de informaciones sinópticas, que preside el profesor Gold, de la organización meteorológica internacional, ha remitido ya al ingeniero Galmarini toda la documentación necesaria para que se efectúe en la América del Sur la distribución del quinto bloque de números característicos, conforme con una distribución racional.

Además del ingeniero Galmarini, integran la comisión regional sudamericana los siguientes miembros:

Doctor Herminio Silva (Brasil), capitán J. Valenzuela (Chile), Rvdo. P. S. Sarasola. S. J. (Colombia), ingeniero Saúl Deleón (Guatemala), inge-

niero G. Wagner (Perú), capitán Fernando Fuentes (Uruguay), y E. Sifontes (Venezuela).

Los nombrados, en su totalidad, son los directores de los servicios meteorológicos de los países indicados.

⁂

El 6 de junio regresó al país el Dr. Alfredo Sordelli, que se había trasladado a Europa para concurrir, en su carácter de reemplazante del eminente hombre de ciencia brasileño Dr. Chagas, a la reunión periódica del Comité de Higiene de la Liga de las Naciones que sesionó durante el mes de abril próximo pasado.

Se trataron temas de indudable interés, relacionados con la alimentación, habitación, epidemias, standardización de los productos biológicos, sueros y vacunas, investigaciones recientes sobre virus filtrables, etc.

Entre otros establecimientos científicos, el Dr. Sordelli visitó el Instituto Pasteur, de París; el National Institute for Medical Researches, de Londres, y realizó algunos estudios en la misma capital con el doctor Bedson sobre psitacosis, en el London Hospital, especialmente en lo que se refiere a la difusión del virus, diagnósticos y métodos.

—A pesar de no haber permanecido más de un mes en Europa —ha manifestado el doctor Sordelli—, he trabajado intensamente y no exageraría si dijera que traigo material de estudio para más de cinco años.

⁂

Noticias telegráficas llegadas a Buenos Aires el 10 de junio informaban que el ingeniero argentino Augusto José Durelli, había recibido el título de Dr. en Ciencias Sociales en la Universidad Libre de París, institución que funciona bajo la alta autoridad del cardenal Baudrillart.

El Sr. Durelli había partido para Europa hace tres años como titular de la beca Sauberan y con el fin de perfeccionar los estudios de su especialidad.

Egresado de nuestra Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en diciembre del año 1932, había realizado una brillante carrera que le valió la medalla de oro al mejor alumno y el premio Rosetti. Simultáneamente había terminado los cursos de la Aliance Française con altas clasificaciones. A su paso por las aulas presidió el Centro de Estudiantes de Ingeniería, y por lo tanto, según el sistema de rotación establecido, la Federación Universitaria de Buenos Aires. Autor de diversos trabajos, los estudios sociológicos le interesaron muy particularmente; de modo que cuando hubo cumplido los propósitos de la beca Sauberan continuó en París los estudios que ahora culmina con el título de Doctor en Ciencias Sociales, logrado con la más alta distinción —« cum maxima laude », según la expresión consagrada en la vieja casa de la « rue » de Vaugirard—, por su tesis, titulada « Essais sur les mentalités contemporaines ».

⁂

El 16 de junio se reunió la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales bajo la presidencia del titular, ingeniero Agustín Mercau, y con asistencia de los académicos Pedro T. Vignau, Raúl Wernicke, Luis

Guglialmelli, Claro C. Dassen, Enrique M. Hermitte, Martín Doello Jurado, Franco Pastore, Enrique Herrero Ducloux, Abel Sánchez Díaz y Juan A. Briano. Fué considerada la adjudicación del premio municipal Eduardo L. Holmberg, correspondiente al año 1933.

En primer lugar, y a fin de que el beneficio de esa recompensa pueda alcanzar a un mayor número de autores, se resolvió que los que hubiesen merecido dicho premio con anterioridad serán considerados fuera de concurso por un período de cinco años, a contar desde la fecha de la adjudicación respectiva, estando establecido, asimismo que los miembros de la Academia quedan automáticamente excluídos de los concursos expresados.

A continuación el profesor Doello Jurado relató los fundamentos del dictamen del jurado que hizo el estudio de los trabajos considerados, aconsejando por unanimidad otorgar el premio mencionado al Dr. José Imbelloni por su trabajo titulado « Los pueblos deformadores de los Andes. La deformación intencional de la cabeza, como arte y como elemento diagnóstico de las culturas ».

El Dr. Imbelloni, que dentro de las ciencias naturales se ha especializado en antropología en el instituto que dirige el profesor Tedeschi, en Italia, es actualmente jefe de la Sección Antropológica del Museo Argentino de Ciencias Naturales, perteneciendo también a la Universidad de Buenos Aires como profesor extraordinario de antropología y etnología; ha publicado más de cien monografías sobre etnología general, relaciones de los pueblos y culturas de América con los demás continentes, determinaciones sobre craneología, génesis y organización del Estado entre los pueblos andinos, etc.

El trabajo que ha merecido el premio mencionada reune numerosas observaciones del autor sobre el problema de la deformación artificial del cráneo, curiosa práctica de las tribus indígenas de diferentes regiones de la tierra que ha sido motivo de estudio por muchos antropólogos extranjeros y nacionales, llegando el Dr. Imbelloni a establecer una clasificación racional de las deformaciones, sólidamente establecida sobre la mecánica fisiológica y sobre los instrumentos con que las madres alteraban la forma natural del cráneo desde la más tierna edad de los niños. La clasificación propuesta ha sido favorablemente acogida por los principales especialistas y está incorporada ahora a algunos de los últimos tratados fundamentales de antropología editados en Europa, lo que realza el valor del trabajo de referencia.

Oportunamente y en acto público se hará entrega del premio mencionado, como también del que fué discernido al profesor Dr. Juan Bacigalupo por su trabajo « Distomatosis por fasciola hepática », correspondiéndole el premio Eduardo L. Holmberg, del año 1934.

EXTENSION DEL METODO DE SUMACION DE M. BOREL A LAS SERIES DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA DUAL E HIPERBOLICA

Por J. C. VIGNAUX

Introducción

En trabajos anteriores, nos hemos ocupado del estudio de las series convergentes de funciones de variable compleja dual (1) y de variable compleja hiperbólica.

En la presente memoria se extiende a estas series, el método de sumación de E. Borel, lográndose de este modo resultados mucho más generales que los enunciados en aquélla.

Comprende dos capítulos. En el primero se define el método de sumación exponencial de Borel y el de Sannia y luego el método (B), para las series de números complejos duales, y luego se aplican a las series de potencias de una variable compleja dual

$$\sum_0^\infty u_n z^n , \qquad [1]$$

donde: $u_n = a_n + kb_n$, $z = x + ky$, siendo k la *unidad imaginaria dual* $(k^2 = 0)$.

El dominio de *sumabilidad* (B) de la serie [1] es el conjunto de los puntos interiores a una *faja* indefinida de lados paralelos al eje imaginario, perfectamente determinada en función de los coeficientes de la serie. La faja de sumabilidad (B), contiene en su interior a la faja de convergencia de la misma.

(1) *Sobre las series convergentes simples y múltiples de funciones de una y de varias variables complejas duales.* « Anales de la Soc. Cient. Argentina ». En su *Geometrie der Dynamen*, E. Study, da una brevísima indicación sobre las series simples de potencias de una variable compleja dual, pág. 198. Esta información me fué dada gentilmente por el Dr. A. Sagastume Berra. En nuestro trabajo antes citado, se hace un estudio sistemático no solamente de estas series, sino también de las series dobles de potencias, de las funcionales, y de las series simples y dobles de Dirichlet.

Este dominio de sumabilidad se extiende a todo el plano, cuando las series reales

$$A(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \quad \text{y} \quad B(x) = \sum_0^\infty b_n x^n ,$$

no tienen ningún punto *singular* sobre el *eje real.*

Después de dar algunos teoremas, termina esta parte con el estudio de algunas series elementales.

En la segunda parte, nos ocupamos de las series funcionales. En primer término se estudian las series de funciones continuas de una variable compleja dual. Se introduce la noción de sumabilidad uniforme (B), noción ésta que da condiciones suficientes para la continuidad de la suma, la integración y derivación de tales series; y luego se estudian las series de funciones holomorfas duales.

En el capítulo II, se hace un estudio análogo para las series funcionales de una variable compleja hiperbólica.

CAPITULO I

1) SERIES DE POTENCIAS DE UNA VARIABLE COMPLEJA DUAL

1. Series numéricas. — Sea la serie

$$\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty (a_n + k\, b_n) \quad , \quad (k^2 = 0) \qquad [1]$$

de números complejos duales, y consideremos la serie de potencias (*serie adjunta*),

$$U(\alpha) = \sum_0^\infty S_n \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_0^\infty (A_n + k\, B_n) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad [2]$$

donde

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \\ &= (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + k\,(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) = \\ &= A_n + k\, B_n , \end{aligned}$$

α una variable real, $\alpha \geq 0$.

Si la serie [2] converge para todo $\alpha \geq 0$ y el

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha} U(\alpha) = S = A + kB$$

existe y es finito, diremos que la serie [1], es *sumable con el método exponencial, con suma S.*

Adoptando como serie adjunta en lugar de la [2], la siguiente

$$U_1(\alpha) = \sum_0^\infty S_n \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad [3]$$

formada con las primitivas de los términos de la serie [2]; y tomando como definición de suma, al

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha} U_1(\alpha) = S_1 = A_1 + k B_1 , \qquad [4]$$

cuando existe y es finito, obtenemos un método de sumación más potente que el anterior, el cual ha sido estudiado por G. Sannia para las series de números complejos ordinarios (1).

En este último caso diremos que la serie [1] es *sumable* (S), *con suma* S_1.

El método de sumación (S) es más potente que el método exponencial, pues se tiene:

Si la serie [1] *es sumable con el método exponencial, ella es también sumable* (S) *con igual suma, pero la recíproca no tiene lugar necesariamente.*

En efecto; puesto que $U(\alpha)$ es la derivada de la función $U_1(\alpha)$, resulta según el teorema de Hopital-Stolz (2), que, si existe el límite de la relación

$$\frac{U(\alpha)}{e^\alpha}, \quad \alpha \longrightarrow + \infty$$

(1) G. Sannia *Nuovo metodo di sommazione delle serie* etc. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917) pág. 307.

(2) *Si las funciones* $f(x)$ y $g(x)$ *son derivables* $f'(x)$ y $g'(x)$ *en un entorno de* $x = \xi'$ (ξ finito o infinito), si $g'(x)$ *tiene un signo constante* y $\lim_{x \to \xi} g(x) = \pm \infty$, *se tiene*:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$$

siempre que existe el límite del primer miembro; pero no recíprocamente. Este teorema ha sido también utilizado por O. Perron para demostrar un lema de Hardy.

también existe el límite de

$$\frac{U_1(\alpha)}{e^{\alpha}}, \quad \alpha \longrightarrow + \infty$$

y son iguales, pero no *recíprocamente.*

El método de sumación de la integral de Borel, se extiende igualmente en la misma forma.

La serie [1] es *sumable* (B), si la serie

$$u(\alpha) = \sum_0^{\infty} u_n \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_0^{\infty} (a_n + k\, b_n) \frac{\alpha^n}{n!}$$

es convergente para $\alpha \geq 0$ y la integral

$$u = \int_0^{\infty} e^{-\alpha}\, u(\alpha)\, d\alpha ,$$

converge con el valor u, suma de la serie propuesta.

El método de *sumación* (S) es *equivalente* al método de sumación (B); puesto que:

Si la serie [1] *es sumable* (S) *con suma* u, *ella es también sumable* (B) *con igual suma y recíprocamente.*

En efecto; si la serie adjunta

$$U_1(\alpha) = \sum_0^{\infty} S_n \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}$$

converge para $\alpha \geq 0$, la serie asociada

$$u(\alpha) = \sum_0^{\infty} u_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

es también convergente para $\alpha \geq 0$ y recíprocamente.

Además, se tiene que

$$\frac{d}{d\alpha}\left[e^{-\alpha}\, U_1(\alpha)\right] = e^{-\alpha}\, u(\alpha)\,.$$

De la relación anterior resulta, integrando entre los límites 0 y α

$$e^{-\alpha}\, U_1(\alpha) = \int_0^{\alpha} e^{-\alpha}\, u(\alpha)\, d\alpha\,,$$

puesto que: $U_1(0) = 0$;, y tomando límites de ambos miembros para $\alpha \to +\infty$, se tiene

$$\lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha}\, U_1(\alpha) = \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha} e^{-\alpha}\, u(\alpha)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha}\, u(\alpha)\, d\alpha\,,$$

por tanto, si existe el límite del primer miembro, existe también el límite del segundo y recíprocamente, y ambos límites son iguales.

De los teoremas anteriores resulta que, el método de *sumación* (B), es más potente que el método exponencial.

Observación. — Este método de demostración elemental, ha sido utilizado por G. Sannia — por vez primera — para probar la no equivalencia de los métodos exponencial e integral de M. Borel en el caso de las series de números complejos ordinarios. «*Estenzione e studio di un metodo di sommazione generico di Borel*». Scritti Matematici offerti a E. D'Ovidio, pág. 227 (1918).

2. — Se puede introducir la noción de sumabilidad (B), también en la forma siguiente.

Sea la serie

$$\sum_0^{\infty} u_n = \sum_0^{\infty} (a_n + k\, b_n) = \sum_0^{\infty} a_n + k \sum_0^{\infty} b_n \qquad [1]$$

su asociada, se puede poner en la forma

$$u(\alpha) = \sum_0^{\infty} u_n \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_0^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!} + k \sum_0^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

y la suma viene definida por la relación

$$S = \int_0^\infty e^{-\alpha} u(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left(\sum_0^\infty a_n \frac{\alpha^n}{n!} \right) d\alpha +$$

$$+ k \int_0^\infty e^{-\alpha} \left(\sum_0^\infty b_n \frac{\alpha^n}{n!} \right) d\alpha$$

De aquí; *la condición necesaria y suficiente para que la serie* [1] *sea sumable* (*B*) *es que las series* (*reales*) *de sus componentes*

[2] $\sum_0^\infty a_n$ y $\sum_0^\infty b_n$ [3]

sean sumables (*B*). *La suma de la serie* [1] *es igual a*: $S = A + kB$, *donde A y B son las sumas de las series* [2] y [3] *respectivamente.*

Tanto el teorema de « permanencia », como las propiedades de las series numéricas ordinarias sumables con los métodos anteriores, subsisten también para las series de *números complejos duales.*

3. Series de potencias. — Consideremos una serie de potencias

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

donde

$$u_n = a_n + k b_n \quad , \quad z = x + k y \ .$$

La serie [1] se puede poner en la forma siguiente

$$\sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty (a_n + k b_n)(x + k y)^n =$$

$$= \sum_0^\infty a_n x^n + k \sum_0^\infty b_n x^n + k y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1}$$

Esta descomposición de la serie [1] en la suma de tres series de potencias de la variable real x, *primer componente* de la variable compleja dual z, juega un rol importante en toda esta cuestión de la sumabilidad.

Los teoremas siguientes fijan de modo preciso el campo de sumabilidad (B) de una serie de potencia de variable compleja dual z.

Teorema I. — *Si la serie*

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

es sumable (B), *en un punto* z_0, *ella es sumable* (B) *en la faja indefinida formada por el eje imaginario y su paralela, trazada por el punto* $M(z = z_0)$.

En efecto; la serie asociada de la [1] es

$$U(\alpha, z) = \sum_0^\infty u_n \frac{(z\alpha)^n}{n!}$$

y como la función $U(\alpha, z)$ depende solamente de la variable αz, pongamos

$$F(\alpha z) = \sum_0^\infty u_n \frac{(\alpha z)^n}{n!} \qquad [2]$$

Por hipótesis, la serie [2] es una trascendente entera de la variable $\alpha \geq 0$, y la integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} F(\alpha z_0)\, d\alpha$$

converge. Si ponemos

$$u_n = a_n + k b_n \quad , \quad z = x + ky \quad , \quad z_0 = x_0 + k y_0$$

se tiene

$$F(\alpha z) = \sum_0^\infty u_n \frac{(\alpha z)^n}{n!} = \sum_0^\infty a_n \frac{(x\alpha)^n}{n!} +$$

$$+ k y \alpha \sum_1^\infty n a_n \frac{(x\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + k \sum_0^\infty b_n \frac{(x\alpha)^n}{n!}$$

es decir

$$F(\alpha z) = A(\alpha x) + k y \alpha A'(\alpha x) + k B(\alpha x) ,$$

designando respectivamente con $A(\alpha x)$, $A'(\alpha x)$ y $B(\alpha x)$ las sumas de las series que figuran en el segundo miembro.

Por tanto, la suma de la serie [1], en el punto $z = z_0$, será

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} F(\alpha z_0)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(x_0 \alpha)\, d\alpha + k y_0 \int_0^\infty e^{-\alpha} . \alpha A'(\alpha x_0)\, d\alpha +$$

$$+ k \int_0^\infty e^{-\alpha} B(x_0 \alpha)\, d\alpha ,$$

siendo convergentes las integrales del segundo miembro.

De la convergencia de las integrales

$$P(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(\alpha x)\, d\alpha \quad , \quad P'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} . \alpha A'(\alpha x)\, d\alpha$$

y

$$Q(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} B(\alpha x)\, d\alpha$$

en el punto $x = x_0$, resulta la convergencia de las mismas en todo el segmento $(0 \leq x \leq x_0)$, según el teorema de Phragmèn (1).

En consecuencia, la integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} F(\alpha z)\, dz = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(\alpha x)\, d\alpha + k y \int_0^\infty e^{-\alpha} . \alpha A'(\alpha x)\, dx +$$

$$+ k \int_0^\infty e^{-\alpha} B(\alpha x)\, d\alpha$$

(1) *Comps Rendus*. París, 132 (1901): 1396-99.

converge en todo punto $z = x + ky$ del dominio

$$\left\{ o \leq x \leq x_0 \quad , \quad -\infty < y < +\infty \right\} \qquad [3]$$

Luego la serie [1] es *sumable* (B), en la faja del plano z, definida por la condición [3], y su *suma* es la función $f(z)$ definida por la relación

$$f(z) = P(x) + k\,[y\,P'(x) + Q(x)] \ .$$

Teorema II. — *Toda serie de potencias*

$$\sum_0^\infty u_n z^n \quad , \quad u_n = a_n + k\,b_n \qquad [1]$$

es sumable (B) *sobre el eje imaginario* $0\,y$.

En efecto, sea: $z = ky$ un punto cualquiera de este eje; su serie asociada es

$$F(\alpha z) = F(k\,\alpha\,y) = u_0 + u_1 \frac{k\,\alpha\,y}{1\,!} = a_0 + k\,(b_0 + a_1\,\alpha\,y),$$

por tanto, la suma de la serie [1] será

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha} F(k\,\alpha\,y)\,d\,\alpha = a_0 \int_0^\infty e^{-\alpha}\,d\,\alpha + k\,b_0 \int_0^\infty e^{-\alpha}\,d\,\alpha +$$

$$+ k\,a_1\,y \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\alpha\,d\,\alpha$$

es decir

$$f(k\,y) = a_0 + k\,(b_0 + a_1\,y)$$

Observación. — Este teorema es una consecuencia inmediata del hecho de que la serie

$$\sum_0^\infty (a_n + k\,b_n) z^n,$$

es siempre *convergente* sobre el eje imaginario; puesto que para todo $z = ky$, resulta

$$(a_0 + b_0\,k) + (a_1 + b_1\,k)ky + 0 + 0 + \ldots =$$

$$= a_0 + k(b_0 + a_1\,y)$$

4. Sumabilidad uniforme. — Diremos que la serie

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

sumable (B) en un cierto conjunto (E) de puntos z, es *uniformemente sumable* (B), si la integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} F(\alpha z)\, d\alpha$$

converge uniformemente, es decir, si dado el número positivo $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $X > 0$ independiente de z, tal que

$$\left| \int_l^{+\infty} e^{-\alpha} F(z\alpha)\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

para $l > X$ cualquiera sea z de (E).

Se tiene para todo $z = x + ky$ del conjunto (E)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} u(z,\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(x\alpha)\, dx +$$

$$+ k\left[y \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha A'(x\alpha)\, d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha} B(\alpha x)\, d\alpha \right]$$

Por tanto: *es condición necesaria y suficiente para que la* [1], *sea uniformemente sumable* (B), *en un conjunto acotado* $E(z)$, *que las series componentes reales sean uniformemente sumables* (B), *en el mismo conjunto.*

Teorema III. — *Si la serie* [1] *es sumable* (B) *en un punto* $z = z_0$ *ella es sumable uniformemente* (B) *en todo rectángulo formado por el eje imaginario, la recta por* z_0 *paralela a este eje y dos rectas cualesquiera paralelas al eje real* $0x$. *La suma* $f(z)$, *es función continua de* z *en dicho rectángulo.*

De la hipótesis se tiene, siguiendo la notación del teorema anterior

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} F(\alpha, z_0)\, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(x_0\,\alpha)\, d\alpha + k y_0 \int_0^\infty e^{-\alpha} \,.\, \alpha A'(x_0\,\alpha)\, d\alpha +$$

$$+ k \int_0^\infty e^{-\alpha} B(x_0\,\alpha)\, d\alpha \,.$$

De la convergencia de las integrales

$$P(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(\alpha x)\, d\alpha \quad , \quad P'(x) = \int_8^\infty e^{-\alpha} A'(\alpha x)\, d\alpha$$

y

$$Q(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} R(\alpha x)\, d\alpha \qquad [2]$$

en el punto $x = x_0$ resulta según un teorema [1] de Phragmèn-Hardy, la convergencia uniforme de las mismas en todo el segmento

$$(0 \leq x \leq x_0)$$

Como la integral

$$y \int_0^\infty e^{-\alpha} \,.\, \alpha A'(x\,\alpha)\, d\alpha \qquad [3]$$

es uniformemente convergente para todo valor acotado de la variable y; si a y b son las cotas superior e inferior de y, resulta de la relación

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha} F(\alpha x)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha} A(\alpha x)\, d\alpha + k y \int_0^\infty e^{-\alpha} \,.\, \alpha A'(\alpha x)\, d\alpha +$$

$$+ k \int_0^\infty e^{-\alpha} B(\alpha x)\, d\alpha$$

[1] *Loc. cit.*, pág.

que la serie [1], es uniformemente sumable (B) en todo punto z del dominio.

$$\left\{ 0 \leq x \leq x_0 \quad , \quad a \leq y \leq b \right\}$$

Las integrales [2] y [3] siendo funciones continuas de x e y en este rectángulo, la función $f(z)$ es también función continua en el mismo.

5. Sumabilidad absoluta. — Diremos que la serie

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

sumable (B) en un cierto conjunto (E), es *absolutàmente* sumable (B), si las integrales

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} \left| \frac{d^{(\lambda)}}{d\alpha^\lambda} u(z, \alpha) \right| d\alpha \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

son convergentes.

Puesto que

$$\frac{d^\lambda}{d\alpha^\lambda} u(z, \alpha) = z^\lambda F^{(\lambda)}(z\alpha) = z^\lambda \sum_{n=0}^\infty u_{n+\lambda} \frac{(z\alpha)^n}{n!},$$

es decir

$$z^\lambda F^{(\lambda)}(z\alpha) = z^\lambda \sum_0^\infty (a_{n+\lambda} + k b_{n+\lambda}) \frac{\alpha^n (x + ky)^n}{n!} =$$

$$= z^\lambda \left[\sum_0^\infty a_{n+\lambda} \frac{\alpha^n x^n}{n!} + k\alpha y \sum_1^\infty a_{n+\lambda} \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!} + k \sum_0^\infty b_{n+\lambda} \frac{(\alpha x)^n}{n!} \right.$$

$$= z^\lambda \left\{ A^{(\lambda)}(\alpha x) + k \left[\alpha y A^{(\lambda+1)}(\alpha x) + B^{(\lambda)}(\alpha x) \right] \right\}$$

se tiene

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} F^{(\lambda)}(\alpha z)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha} A^{(\lambda)} \alpha x)\, d\alpha +$$

$$+ y \int_0^\infty e^{-\alpha} . \alpha A^{(\lambda+1)}(\alpha x)\, d\alpha + \int_0^\infty e^{-\alpha} B^{(\lambda)}(x\alpha)\, d\alpha$$

de donde se deduce que: *es condición necesaria y suficiente para que la serie* [1] *sea absolutamente sumable* (B) *que sus componentes sean absolutamente sumables* (B), *en el mismo conjunto.*

Teorema IV. — *Si la serie* [1] *es absolutamente sumable* (B) *en un punto* $z = z_0$ *ella es sumable absolutamente en todo rectángulo formado por el eje imaginario, la recta por* z_0 *paralela a este eje, y dos rectas cualesquieras paralelas al eje real.*

De la hipótesis resulta que las series

$$\sum_0^\infty a_n x^n \quad , \quad \sum_1^\infty a_n . n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \sum_0^\infty b_n x^n$$

son *sumables absolutamente* (B) en el punto $x = x_0$, por tanto según un teorema de E. Borel, estas series son *absolutamente sumagles* (B) sobre el segmento $(0\, x_0)$, así como también la serie

$$y . \sum_1^\infty a_n n x^{n-1}$$

para todo valor acotado de la variable y.

Si a y b son las *cotas* superior e inferior de y, la serie [1] es por tanto *sumable absolutamente* en el dominio

$$0 \leq x \leq x_0 \quad , \quad a \geq y \geq b$$

6. Faja de sumabilidad. — Nos proponemos ahora determinar cual es la faja más amplia de sumabilidad (B), de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

donde

$$u_n = a_n + k b_n \quad , \quad z = x + ky ,$$

la cual suponemos convergente, en una cierta *faja de convergencia* de *radio finito.*

Consideremos en primer lugar el caso en que u_n sea *real*: $u_n = a_n$, la serie dada se puede escribir en la forma siguiente

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (x + ky)^n = \sum_0^\infty a_n x^n + ky \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} \quad ,$$

y su serie asociada, es por tanto

$$u(\alpha z) = \sum_0^\infty a_n \frac{(z\alpha)^n}{n!} = \sum_0^\infty a_n \frac{(\alpha x)^n}{n!} + k y \alpha \sum_1^\infty a_n \frac{(\alpha x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= a(x\alpha) + k y \alpha a'(x\alpha)$$

donde $a'(x\alpha)$ es la derivada respecto a la variable x, de la asociada $a(x\alpha)$.

La suma de la serie [1], es por tanto

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} u(\alpha z)\, d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha} a(\alpha x)\, d\alpha + ky \int_0^\infty e^{-\alpha} . \alpha a'(\alpha x)\, d\alpha .$$

El polígono de sumabilidad $|B|$, de la serie real

$$\sum_0^\infty a_n x^n$$

es decir, la región de convergencia absoluta de la integral

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} a(\alpha x)\, d\alpha$$

se reduce a un cierto segmento (m, n) que contiene en su interior al origen 0, y cuyos extremos están dados por la fórmula de Servant-Borel (1)

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{b \to \infty}} \frac{1}{b} \log |a(b e^{i\theta})|$$

donde

$$x = \rho e^{i\theta} \qquad b = \alpha \rho ,$$

y, θ toma los dos valores

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = \pi$$

(1) E. Borel. *Leçons sur les series divergentes.* Gauthier-Villar (París, 1928, Cap. III).

Designando con ϱ_1 y ϱ_2 las abscisas de los extremos de este intervalo de sumabilidad $|B|$, se tiene

$$\varrho_1 = \frac{1}{\overline{\lim_{b \to \infty}} \frac{1}{b} \log |a(b)|}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{\overline{\lim_{b \to \infty}} \frac{1}{b} \log |a(b e^{i\pi})|} \qquad [A]$$

Si $\varrho_2 = \infty$ la serie $\sum_0^\infty a_n x^n$ es sumable $|B|$ en la semi-recta de centro $A(\varrho_2, 0)$ y que contiene el punto 0.

Si $\varrho_1 = \infty$ ella es sumable $|B|$ en la semi-recta de sentido opuesto y de centro en $B(\varrho_1, \pi)$.

En cuanto a la integral

$$\varphi'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \cdot \alpha\, a'(x\alpha)\, d\alpha$$

que define la suma de la serie derivada

$$\sum_1^\infty a_n x^{n-1},$$

es sumable absolutamente en el mismo intervalo anterior. Teniendo presente la igualdad anterior se concluye:

La serie de potencia [1] *es sumable* (B) *en la faja indefinida del plano* $z = x + ky$, *cuyos lados son las rectas*

$$x = \varrho_1 \qquad \text{y} \qquad x = \varrho_2$$

donde ϱ_1 y ϱ_2 *están dados por la* (A).

Consideremos ahora, el caso que los coeficientes de la serie propuesta, sean números complejos duales

$$u_n = a_n + k\, b_n$$

Se tiene entonces

$$\sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty (a_n + k\, b_n)(x + k\, y)^n$$

$$= \sum_0^\infty a_n x^n + k \sum_0^\infty b_n x^n + k\, y \sum_1^\infty a_n\, n\, x^{n-1} \qquad [5]$$

y para la serie asociada resulta

$$u(zt) = \sum_0^\infty u_n \frac{z^n t^n}{n!} = \sum_0^\infty a_n \frac{t^n x^n}{n!} + k \sum_0^\infty b_n \frac{z^n x^n}{n!} + \\ + k\,y\,t \sum_1^\infty a^n \frac{x^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= a(tx) + k\,b(tx) + k\,y\,t\,a'(tx) \qquad (t \geq 0)$$

La suma de la serie [1] será

$$\int_0^\infty e^{-t} u(z,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} a(tx)\,dt + k\,y \int_0^\infty e^{-t}.\,t\,a'(tx)\,dt + \\ + \int_0^\infty e^{-t} b(tx)\,dt \qquad [6]$$

Las series reales

$$\sum_0^\infty a_n x^n \qquad \text{y} \qquad \sum_1^\infty a_n\,n\,x^{n-1}$$

son *sumables* $|B|$ *en el intervalo* (m, n) *antes definido.* El intervalo de *sumabilidad* (m', n') de la serie real

$$\sum_0^\infty b_n x^n$$

queda definido por las expresiones

$$\mu_1 = \frac{1}{\overline{\lim_{c \to \infty}} \frac{1}{c} \log |b(c)|} \qquad \mu_2 = \frac{1}{\overline{\lim_{c \to \infty}} \frac{1}{c} \log |b(c\,e^{i\pi})|}$$

Los intervalos (ϱ_1, σ_2) y (μ_1, μ_2) tienen una parte común si no es: $\varrho_2 = \mu_1 = 0$ y designando sus extremos por p y q, la serie [1], es sumable $|B|$ según la [6] en el interior de la faja cuyos lados tienen por ecuación

$$x = p \qquad \text{y} \qquad x = q$$

A este dominio llamaré *faja de sumabilidad* (B) y a los números p y q que miden la distancia de sus lados al eje $0\,y$, su *semiamplitud.*

La serie potencial [1] define por suma (B) en el intervalo de su faja de sumación $|\,B\,|$, una función holomorfa $f(z)$, igual a

$$f\,(z) = \varphi\,(x) + k\,[\,y\,\varphi'\,(x) + \theta\,(x)] \qquad [2]$$

donde $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ y $\theta\,(x)$ son las sumas (B) de las series componentes.

Podemos formular en consecuencia la siguiente conclusión: *Toda serie de potencia* [1] *es sumable absolutamente* (B) *en el interior de su faja de sumabilidad* (B) *y no es sumable* $|\,B\,|$ *en los puntos exteriores a la misma. En los puntos del contorno, la serie* [1] *no es sumable* (B).

Toda serie de potencia define por su suma (B) *en los puntos interiores de su faja de sumabilidad* (B) *una función holomorfa* $f(z)$ *de la variable compleja dual* z, *dada por la relación* [2].

7. — Sea una serie de potencias a coeficientes reales

$$\sum_0^\infty a_n\,z^n = \sum_0^\infty a_n\,x^n + k\,y\sum_1^\infty a_n\,n\,x^{n-1}\,,$$

$$= P\,(x) + k\,y\,P'\,(x) \qquad [1]$$

convergente en una cierta faja de convergencia de radio R finito

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|\,a_n\,|}}$$

Los extremos del intervalo $(-R_1 + R)$ o uno de ellos, pueden ser punto singular de la función real $P(x)$ de la variable real x.

Si el punto $(R\,,\,0)$ es singular, la serie

$$P\,(x) = \sum_0^\infty a_n\,x^n \qquad [2]$$

es sumable (B) en el semieje real cuyo vértice es este punto singular y que contiene el origen 0; por tanto la serie [1] es sumable (B) en el semiplano limitado por la recta de ecuación $x = R$ y que contiene el origen 0.

Si $(-R', 0)$ es un punto singular, el semiplano de sumabilidad (B) se extiende a la derecha de la recta $x = -R'$.

Si ambos puntos son singulares la faja de sumabilidad es la formada por las rectas: $x = R$, $x = -R'$.

Finalmente, si $P(x)$ no tiene puntos singulares sobre el eje $0\,x$, la serie [1] es sumable (B) en todo el plano de la variable $z = x + ky$.

Daremos algunos ejemplos.

1º) Sea la serie

$$f(z) = \sum_0^\infty z_n = \sum_0^\infty x^n + k\,y \sum_1^\infty n\,x^{n-1}$$

la cual tiene como radio de convergencia $R = 1$. Como la función

$$P(x) = \frac{1}{1-x}$$

tiene como único punto singular a: $x = +1$, la serie dada es sumable (B) en todo el semiplano que contiene el origen 0 y limitado por la recta de ecuación

$$x = +1$$

En todo este semiplano la suma (B) es igual a

$$f(z) = \frac{1}{1-x} + k\,y\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-z}$$

2º) La serie

$$\sum_0^\infty (-1)^n z^n = \sum_0^\infty (-1)^n x^n + k\,y \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\,n\,x^{n-1}$$

converge en la faja de radio $R = 1$, la función

$$P(x) = \sum_1^\infty (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

tiene el único punto singular $x = -1$; luego la serie [1] es su-

mable (B) en todo el semiplano de la derecha de la recta $x = -1$ y su suma es la función

$$f(z) = \frac{1}{1+k} + k\,y\,\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+z}$$

3º) Sea la serie logarítmica

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\right) + k\,y\,(1 - x + x^2 - \ldots) =$$

$$= \log(1+x) + k\,y\,\frac{1}{1+x}$$

que converge en la faja de radio $R = 1$.

La función

$$P(x) = \log(1+x)$$

tiene por punto singular a $x = -1$, luego la serie propuesta es sumable (B) en el semiplano de la derecha de la recta $x = -1$ y la serie define la función $\log(1+z)$.

Del mismo modo la serie

$$\log(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

es sumable (B) en el semiplano de la izquierda de la recta $x = 1$.

4º) Sea la serie

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4$$

$$= (1 - x^2 + x^4 - \ldots) - k\,y\,(2x - 4x^3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - k\,y\,\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad [1]$$

que tiene como faja de convergencia la faja de radio $R = 1$.

Como la función real

$$P(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

no tiene ningún punto singular sobre el eje $0x$, la serie [1] es *sumable* (B) en todo el plano $x = x + ky$, y ella define por su suma (B) la función

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

regular en todo el plano de la variable compleja dual z.

8. — Sea la serie

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n = \sum_0^\infty a_n x^n + k\left(y \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n \right) \quad [1]$$

con una cierta faja (F) de sumabilidad (B). *La función* $f(z)$ *es continua en toda faja* (F') *interior a la* (F).

En efecto, las funciones

$$P(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \ , \ P'(x) = \sum_1^\infty n\, a_n x^{n-1} \ , \ Q(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$$

sumas de series potenciales reales sumables (B), en un cierto intervalo (α, β) inferior a (F) son funciones continuas de x, así como también la $y.P'(x)$ resulta función continua del conjunto (x, y) en todo punto interior a la faja F.

Por tanto, la función $f(z)$ definida por la igualdad

$$f(z) = P(x) + k\,[y\,.\,P'(x) + Q(x)]$$

es función continua en la faja F de sumabilidad (B).

9. — Series derivadas. — Dada la serie de potencias

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots \quad [1]$$

consideremos la serie *derivada primera*, de la [1]

$$u_1 + 2\,u_1 z + 3\,u_2 z^2 + \ldots \quad [2]$$

El dominio de sumabilidad $|B|$ de la serie derivada, está dado por el siguiente teorema: *La serie derivada* [2] *tiene la misma faja de sumabilidad* $|B|$ *de la serie* [1], *y su suma es la derivada* $f'(z)$ *de la suma* $f(z)$ *de la serie* [1].

En efecto; sea (F) la faja de convergencia de la serie [1], resulta

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n + k\left[y \sum_1^\infty n\, a_n x^{n-1} + \sum_0^\infty b_n x^n\right] =$$

$$= P(x) + k\,[y \,.\, P'(x) + Q(x)]$$

donde $P(x)$, $P'(x)$ y $Q(x)$ son las sumas de las series componentes, sumables $|B|$ en el intervalo (α, β) del eje real determinado por los lados de la faja.

De aquí, y teniendo presente un teorema de M. Borel, resulta que también las series reales

$$P'(x) = \sum_2^\infty n\,(n-1)\, a_n x^{n-2}, \quad Q'(z) = \sum_1^\infty n\, b_n x^{n-1},$$

tienen el mismo intervalo (α, β) de sumabilidad $|B|$; en consecuencia, la serie derivada

$$f'(z) = \sum_1^\infty n\, u_n z^{n-1} = P'(x) + k\,[y \,.\, P''(x) + Q'(x)]$$

tiene la misma faja de sumabilidad $|B|$ y su suma es igual a

$$f'(z) = P'(x) + k\,[y \,.\, P''(x) + Q'(x)]\,.$$

Del mismo modo se deduce que la serie derivada segunda

$$2\, u_2 + 2 \,.\, 3\, u_3 z + \ldots \qquad [3]$$

tiene la misma faja (F) de sumabilidad $|B|$ y su suma es la $f''(z)$, y así sucesivamente. De aquí la conclusión:

La función $f(z)$ *definida por la serie* [1] *en su faja de sumabilidad* (B), *tiene una sucesión ilimitada de derivadas,* $f^{(n)}(z)$, *definidas por las series derivadas sucesivas, sumables* $|B|$ *en la misma faja* (F).

10. Serie de Mac-Laurin. — Sea $f(z)$ una función definida por la serie

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} u_n z^n . \qquad [1]$$

sumable (B) en una cierta faja (F) de sumabilidad. Según el teorema anterior, se tiene

$$f(z) = 1 , 2 \ldots n . u_n + 2 . 3 \ldots n (n+1) u_{n+1} z + \ldots$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

y estas series son sumables (B) en la faja (F). De aquí resulta que

$$f(0) = u_0 \quad , \quad f'(0) = u_1 \quad , \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = u_n , \ldots$$

de modo que el desarrollo de $f(z)$ se puede escribir

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \qquad [2]$$

que nos define $f(z)$ en función de sus derivadas sucesivas en el origen, mediante una serie de Mac-Laurin sumable $|B|$, en la faja (F).

Por tanto: *Toda serie de potencia* [1], *define por su suma, una función compleja* $f(z)$ *de la variable compleja dual* z, *continua y con derivadas de todos los órdenes, en el interior de su faja de sumabilidad* (B).

Del desarrollo [2] se deduce igualmente el desarrollo tayloriano, para la función $f(z)$.

2) SERIES FUNCIONALES

Series de funciones continuas de una variable compleja dual

11. DEFINICIONES. — Dada una serie de funciones de la variable compleja dual $z = x + ky$, definidas en un cierto dominio D del plano de la variable z

$$\sum_0^\infty f_n(z) \qquad [1]$$

diremos que ella es *sumable con el método exponencial*, en dicho campo, cuando para cada valor de z del dominio D, la *serie adjunta*

$$V(\alpha, z) = \sum_0^\infty S_n(z) \frac{\alpha^n}{n!}$$

donde

$$S_n = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z)$$

es convergente, para todo $\alpha \geqq 0$ y existe el

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha} V(\alpha, z) = f(z)$$

La función $f(z)$ así definida es la *suma* de la serie propuesta.

Sea [1] una serie sumable en el dominio D; diremos que ella es sumable *uniformemente* en D, cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) la serie adjunta

$$V(\alpha, z) = \sum_0^\infty S_n(z) \frac{\alpha^n}{n!}$$

converge uniformemente para todo punto z interior a D y todo α del intervalo $(0, m)$ donde m es un número positivo arbitrario.

b) la expresión

$$e^{-\alpha} V(\alpha, z)$$

tiende *uniformemente* a su límite $f(z)$, para $\alpha \to +\infty$ y z del do-

minio D; esto es, a todo número $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un número $A > 0$ *independiente* de z tal que

$$| c^{-\alpha} V(\alpha, z) - f(z) | < \varepsilon$$

para todo $\alpha \geq A$.

Toda serie uniformemente convergente en un dominio D, es también uniformemente sumable en dicho dominio.

12. — La noción de sumabilidad uniforme, nos permite obtener, a igual que la noción de convergencia uniforme, una condición suficiente para que una serie sumable con el método exponencial pueda ser derivable e integrable término a término (1).

Teorema V. — *Si la serie de funciones continuas*

$$f(z) = \sum_0^\infty f_n(z)$$

en el dominio D, es uniformemente sumable en el mismo su suma $f(z)$ *es también función continua en D.* En efecto; sea z un punto cualquiera interior a D, la suma

$$S_n(z) = f_0(z) + \ldots + f_n(z)$$

como suma de n funciones continuas, es continua; por tanto la función

$$V(\alpha, z) = \sum_0^\infty S_n(z) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad [2]$$

es en virtud de la condición (α), función continua de z para cada $a \geq 0$.

De la hipótesis resulta que la expresión

$$e^{-\alpha} V(\alpha, z) \qquad [3]$$

tiende uniformemente a su límite $f(z)$, para $\alpha \to +\infty$, y como la

(1) Se puede introducir también la noción de sumabilidad *cuasi-uniforme.*

expresión [3] es función continua de z para cada valor de $\alpha \geq 0$, resulta que

$$\lim_{h \to 0} \cdot \lim_{\alpha \to \infty} [e^{-\alpha} V(z + h, \alpha)] = \lim_{\alpha \to \infty} \cdot \lim_{h \to 0} [e^{-\alpha} V(z + h, \alpha)] =$$

$$= \lim e^{-\alpha} \cdot V(z, \alpha), \quad (h = \Delta x + k \Delta y).$$

es decir

$$\lim_{h \to 0} f(z + h) = \lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha} v(z, \alpha) = f(z)$$

luego la función $f(z)$ es continua en el punto z y por lo tanto en todo el dominio D.

Teorema VI. — *Si la serie de funciones continuas*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} f_n(z) \qquad [1]$$

es uniformemente sumable en el dominio D, con suma $f(z)$ la integral de $f(z)$ sobre un arco de curva simple (c) situado en D es la suma de la serie formada integrando los términos de la [1] *sobre la misma curva c.*

En efecto; la serie asociada

$$V(z, \alpha) = \sum_{0}^{\infty} S_n(z) \frac{\alpha_n}{n!} \qquad [2]$$

es uniformemente convergente para todo z de D, y para cada valor fijo de $\alpha \geq 0$ y como sus términos

$$S_n(z) = f_0(z) + \ldots + f_n(z)$$

son integrales sobre la curva c, la serie [2] es integrable, término a término respecto de z sobre c y tiene por suma la integral de la función continua $u(z, \alpha)$ sobre c; es decir

$$\int_c V(z, \alpha)\, dz = \int_c \left(\sum_{0}^{\infty} S_n(z) \frac{\alpha^n}{n!} \right) dz = \sum_{0}^{\infty} \left[\int_c S_n(z)\, dz \right] \frac{\alpha^n}{n!}$$

Si ponemos

$$U_n = \int_c S_n(z)\, dz = \sum_{v=0}^{v=n} \int_c f_v(z)\, dz$$

la igualdad anterior resulta

$$\int_c u(z, \alpha)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

Por otra parte de la sumabilidad uniforme (B) de la serie dada resulta que

$$e^{-\alpha} V(z, \alpha)$$

tiende *uniformemente* a su límite $f(z)$ para $t \to \infty$ y z de D, y como la integral de $f(z)$ sobre c, existe por ser continua, se tiene

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_c e^{-\alpha} V(z, \alpha)\, dz = \int_c \lim e^{-\alpha} \cdot V(\alpha, z)\, dz = \int_c f(z)\, dz$$

Según esto y puesto que

$$\int_c e^{-\alpha} \cdot u(z, \alpha)\, dz = e^{-\alpha} \sum_0^{\infty} U_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

se tiene

$$\int_c f(z)\, dz = \lim_{\alpha \to \infty} e^{-\alpha} \sum_0^{\infty} U_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

luego la serie

$$\int_c f_0(z)\, dz + \int_c f_1(z)\, dz + \ldots + \int_c f_n(z)\, dz + \ldots$$

es sumable (B) y su suma es la integral

$$\int_c f(z)\, dz\,.$$

TEOREMA VII. — *Sea la serie*

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) \qquad [1]$$

sumable (B) *con suma* $f(z)$ *y sus términos* $f_n(z)$ *funciones derivables con derivadas continuas en un cierto dominio* D. *Si la serie derivada*

$$\sum_{0}^{\infty} f'_n(z) \qquad [2]$$

es uniformemente sumable (B) *en* D, *su suma* $\varphi(x)$ *es la derivada de la función* $f(z)$.

En efecto; integrando respecto de z sobre una curva c de extremo z_0 y z, ambos miembros de la serie

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} f'_n(z)$$

se tiene

$$\int_{z_o}^{z} \varphi(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(z) - f_n(z_0)]$$

Además, siendo las series

$$\sum_{0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{y} \quad f(z_0) = \sum_{0}^{\infty} f_n(z_0)$$

sumables (B) se tiene

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\, dz = f(z) - f(z_0)$$

de donde

$$\varphi(z) = f'(z).$$

13. — El método de sumación integral se extiende igualmente en la siguiente forma:

Sea la serie

$$\sum_0^\infty f_n(z)$$

de funciones de la variable compleja dual $z = x + ky$ continuas en un cierto dominio D. La serie sumable (B) cuando la serie asociada

$$u(\alpha, z) = \sum_0^\infty f_n(z) \frac{\alpha^n}{n!} \qquad [2]$$

es convergente para $\alpha \geq 0$ y la integral

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \cdot u(\alpha, z)\, dz$$

converge con el valor $f(z)$.

La serie [1] supuesta sumable (B) en todo un dominio D, es uniformemente sumable (B) cuando:

la serie [2] de funciones de dos variables z y α es uniformemente convergente para z de D y $0 \leq \alpha \geq p$ donde $p > 0$ arbitrario;

y la integral [3] converge uniformemente en D.

Esta noción de sumabilidad uniforme es extensión del concepto de convergencia uniforme.

Los teoremas sobre continuidad, integración y derivación anteriormente demostrados, subsisten cuando se adoptan estas nuevas definiciones de sumabilidad y los teoremas respectivos de las series reales sumables con la integral de Borel, dado por Hardy (1).

2. — *Series de funciones holomorfas duales*

Cuando los términos de una serie son funciones holomorfas duales, los resultados del número anterior se pueden obtener en la forma que sigue:

14. — Consideremos la serie

$$\sum_0^\infty f_n(z) \qquad [1]$$

cuyos términos son funciones holomorfas de la variable compleja dual $z = x + ky$.

(1) *Transactions Cambridge Philos. Soc.* V. 19 (1904).

En este caso resulta

$$f_n(z) = P_n(x) + k\,[y\,.\,P'_n(x) + Q_n(x)]\,;$$

donde $P_n(x)$, $P_n'(x)$ y $Q_n(x)$ son funciones reales de x; por tanto

$$\sum_0^\infty f_n(z) = \sum_0^\infty P_n(x) + k\left[y\sum_0^\infty P'_n(x) + \sum_0^\infty Q_n(x)\right] \qquad [2]$$

Diremos que la serie [2] es sumable (B) en un cierto punto $z = x + ky$, si las series reales

$$\sum_0^\infty P_n(x) \quad , \quad \sum_0^\infty P'_n(x) \quad \text{y} \quad \sum_0^\infty Q_n(x) \qquad [3]$$

son sumables en el punto x.

La serie [2] es *sumable absolutamente* (B), o *sumable uniformemente* (B), cuando las series componentes [3] son sumables (B) absolutamente o uniformemente respectivamente.

Determinaremos el dominio de sumabilidad (B) de la serie [2].

Sean $(a\,,b)$, $(a'\,,b')$ y $(a''\,,b'')$ los intervalos de sumabilidad (B) de las series

$$P(x) = \sum_0^\infty P_n(x) \quad , \quad R(x) = \sum_0^\infty P'_n(x) \quad \text{y} \quad Q(x) = \sum_0^\infty Q_n(x)$$

Si $(\alpha\,,\beta)$ es el intervalo común de los tres intervalos anteriores, la serie [2] resulta en consecuencia sumable (B) en todos los puntos $z = x + ky$, de la faja indefinida cuyos lados tiene por ecuación: $x = \alpha$, $y = \beta$; y la serie representa en todos los puntos interiores de esta faja una función $f(z)$ de la variable z, definida por la relación

$$f(z) = P(x) + k\,[y\,R(x) + Q(x)]\,. \qquad [2]$$

A esta faja la llamaremos *faja de sumabilidad* (B) de la serie [1] y al número $\varrho = |\,\alpha\,| + |\,\beta\,|$ la *amplitud de la faja.*

Toda serie de funciones holomorfas duales es sumable (B) *en la faja de interferencia de las fajas de sumabilidad* (B) *de las series*

componentes cuyos lados son paralelos al eje imaginario y ella define por su suma, una función $f(z)$ dada por la relación [2].

Si la serie

$$R(x) = \sum_0^\infty P'_n(x),$$

es uniformtmente sumable (B) en el intervalo (α, β) la suma $R(x)$ de la serie [3] es igual a la derivada de $P(x)$,

$$R(x) = P'(x)$$

por tanto, en este caso se tiene

$$f(z) = P(x) + k\,[y \,.\, P'(x) + Q(x)]\,.$$

14. CONTINUIDAD. — *Una serie de funciones holomorfas duales*

$$f(z) = \sum_0^\infty f_n(z),$$

uniformemente sumable (B) representa una función $f(z)$ continua en toda su faja de sumabilidad (B).

En efecto, según la hipótesis se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty f_n(z) = \sum_0^\infty P_n(x) + k\left[y \,.\, \sum_0^\infty P'_n(x) + \sum_0^\infty Q_n(x)\right]$$

y como las series

$$P(x) = \sum_0^\infty P_n(x),\ R(x) = P'(x) = \sum_0^\infty P'_n(x)$$

$$Q(x) = \sum_0^\infty Q_n(x)$$

son uniformemente sumable (B) en el intervalo (α, β), sus sumas

$P(x)$, $P'(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x en dicho intervalo, por tanto, la $f(z)$ definida por la relación

$$f(z) = P(x) + k\,[y\,p'(x) + Q(x)]$$

es función continua de z en dicha faja.

15. Integración. — *Sea la serie de funciones holomorfas duales*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} f_n(z)$$

uniformemente sumables (B) *en una cierta faja* (F); *si* c *es una curva simple situada en* (F), *se tiene*

$$\int_c f(z)\,dz = \sum_{0}^{\infty} \int_c f_n(z)\,dz$$

En efecto; sea $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ la ecuación de la curva c y

$$A \begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \end{cases} \qquad B \begin{cases} x_1 = \varphi(t_1) \\ y_1 = \psi(t_1) \end{cases}$$

las coordenadas de sus extremos A y B; las series

$$P(x) = \sum_{0}^{\infty} P_n(x) \quad P'(x) = \sum_{0}^{\infty} P'_n(x) \quad \text{y} \quad Q(x) = \sum_{0}^{\infty} Q_n(x)$$

son uniformemente sumables (B) en el intervalo (x_0, x_1), por tanto

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x)\,dx = \sum_{0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} P_n(x)\,dx \qquad \int_{x_0}^{x_1} P'(x)\,dx = \sum_{0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} P'_n(x)\,dx$$

y

$$\int_{x_0}^{x_1} Q_n(x)\,dx = \sum_{0}^{\infty} \int Q(x)\,dx$$

en consecuencia la serie

$$\sum_0^\infty \int_c f_n(z)\,dz = \sum_0^\infty \int_{x_0}^{x_1} P_n(x)\,dx + k\Big[y \sum_0^\infty \int_{x_0}^{x_1} P'(x)\,dx + \sum_0^\infty \int_{x_0}^{x_1} Q_n(x)\,dx\Big]$$

es sumable (B) sobre c y se tiene

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x_1} P(x)\,dx + k\Big[y \int_{x_0}^{x_1} P'(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} Q(x)\,dx\Big]$$

CAPITULO II

SERIES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA HIPERBOLIDA

En este capítulo vamos a extender a las series de funciones de una variable compleja hiperbólica, los resultados del capítulo anterior.

16. Series numéricas. — Sea la serie de números complejos hiperbólicos (1)

$$\sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty (a_n + j b_n) = j_1 \sum_0^\infty u_n' + j_2 \sum_0^\infty u_n'', \qquad [1]$$

y supongamos que la serie de potencias de la variable real t, (serie asociada),

$$u(t) = \sum_0^\infty u_n \frac{t^n}{n!} = \sum_0^\infty (a_n + j b_n) \frac{t^n}{n!} =$$

$$= j_1 \sum_0^\infty u_n' \frac{t^n}{n!} + j_2 \sum_0^\infty u_n'' \frac{t^n}{n!}$$

sea convergente para $t \geq 0$.

(1) Durañona-Vignaux. *Sobre las series de números complejos hiperbólicos*, y *Sobre la teoría de las funciones de una variable compleja hiperbólica* « Contribución al Estudio de las Ciencias Físicomatemáticas », Vol. I, E. 2º (1935).

Diremos que la serie [1] es *sumable* (B), con *suma* s, si la integral

$$s = \int_0^\infty e^{-t} u(t)\, dt,$$

es convergente con el valor s.

Puesto que

$$s = \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_0^\infty a_n \frac{t^n}{n!} \right) dt + j \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_0^\infty b_n \frac{t^n}{n!} \right) dt =$$

$$= j_1 \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_0^\infty u_n' \frac{t^n}{n!} \right) dt + j_2 \int_0^\infty e^{-t} \left(\sum_0^\infty u_n'' \frac{t^n}{n!} \right) dt,$$

resulta: *es condición necesaria y suficiente, para que la serie serie* [1] *sea sumable* (B), *que sus componentes*

[2] $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$ [3]

o sus componentes isótropas

[4] $\sum_0^\infty u_n'$ y $\sum_0^\infty u_n''$ [5]

sean sumables (B). *La suma de la serie* [1] *es igual a*

$$s = A + jB = V_1 j_1 + V_2 j_2 .$$

La serie [1] es *sumable* $|B|$, si las integrales

$$\int_0^\infty e^{-t} |u^{(\lambda)}(t)|\, dt \quad (\lambda = 1, 2, 3 \ldots)$$

son convergentes.

La serie [1] *es sumable* $|B|$, *si sus componentes* [2] y [3] *o sus componentes isótropas* [3] y [4], *son sumables* $|B|$.

Todas las propiedades de las series sumables (B) subsisten también en este campo.

17. Series de potencias. — Sea la serie de potencias

$$\sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

donde

$$u_n + a_n + j b_n = j_1 u_n' + j_2 u_n''$$

y

$$z = x + j y = j_1 z' + j_2 z''$$

Vamos a determinar la región del plano de la variable z, en el cual la serie propuesta es sumable (B).

Teorema VIII. — *Si la serie* [1] *es sumable* (B), *en un punto* $z_0 = x_0 + j y_0 = z_0' j_1 + z_0'' j_2$, *ella es sumable* (B), *en el rectángulo formado por las rectas isótropas:* $y = x$, $y = -x$ *y las paralelas a éstas, por el punto* z_0.

Por hipótesis, la integral

$$\int_0^\infty e^{-t} F\,(t\,z_0)\,dt$$

donde

$$u\,(t\,z_0) = F\,(t\,z_0) = \sum_0^\infty u_n \frac{(t\,z_0)^n}{n\,!}$$

es convergente. Además resulta

$$F\,(t\,z) = j_1 \sum_0^\infty u_n' \frac{(z'\,t)^n}{n\,!} + j_2 \sum_0^\infty u_n'' \frac{(z''\,t)}{n\,!} =$$

$$= j_1\,V_1\,(t\,z') + j_2\,V_2\,(t\,z'')\,.$$

por tanto, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-t} F\,(t\,z_0)\,dt = j_1 \int_0^\infty e^{-t} V_1\,(t\,z'_0)\,dt + j_2 \int_0^\infty e^{-t} V_2\,(t\,z_0'')\,dt\,.$$

siendo convergentes las integrales que figuran en el segundo miembro.

De la convergencia de las integrales

$$P\,(z') = \int_0^\infty e^{-t} V_1\,(t\,z')\,dt \quad , \quad Q\,(z'') = \int_0^\infty e^{-t} V_2\,(t\,z'')\,dt$$

en el punto z_0' y z_0'' respectivamente; resulta según el teorema de Phragmèn, que ellas convergen respectivamente en los intervalos

$$O \leq z' \leq z'_0 \qquad \text{y} \qquad O \leq z'' \leq z_0''$$

Por tanto, la integral

$$\int_0^\infty e^{-t} F(tz)\, dt = j_1 \int_0^\infty e^{-t} V_1(tz')\, dt + j_2 \int_0^\infty e^{-t} V_2(tz'')\, dt ,$$

converge en todo punto: $z = j_1 z' + j_2 z''$ del rectángulo cuyos lados son los segmentos $\overline{0\, z_0'}$ y $\overline{0\, z_0''}$.

18. — Diremos que la serie

$$\sum_0^\infty u_n z^n , \qquad [1]$$

sumable (B) en un conjunto E de puntos del plano z, es *uniformemente sumable* (B), si la integral

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} F(tz)\, dt ,$$

converge uniformemente en $E(z)$.

Es condición necesaria y suficiente para la sumabilidad uniforme (B) *de la serie* [1], *que sus componentes isótropas sean uniformemente sumables* (B).

Teorema IX. — *Si la serie* [1], *es sumable* (B) *en un punto*: $z_0 = j_1 z_0' + j_2 z_0''$, *ella es sumable uniformemente en el rectángulo formado por las rectas isótropas*: $y = x$, $y = -x$ *y las paralelas a éstas por el punto* z_0.

Se tiene, por hipótesis

$$\int_0^\infty e^{-t} F(tz_0)\, dt + j_1 \int_0^\infty e^{-t} V_1(tz_0')\, dt + j_2 \int_0^\infty e^{-t} V_2(tz''_0)\, dt .$$

Además, de la convergencia de las integrales el el punto $z_0 = z_0' j_1 + z'' j_2$, resulta según el teorema de Phragmèn-Hardy, la convergencia uniforme en los segmentos

$$(0 \leq z' \leq z_0') \qquad \text{y} \qquad (0 \leq z'' \leq z_0'')$$

respectivamente; y por tanto, de la igualdad

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} F(tz)\, dt = j_1 \int_0^\infty e^{-t} V_1(tz')\, dt + j_2 \int_0^\infty e^{-t} V_2(tz'')\, dt .$$

resulta la sumabilidad uniforme de la serie [1], en el dominio

$$(0 \leq z' \leq z_0' \quad , \quad 0 \leq z'' \leq z_0'') .$$

19. — Supuesta la serie

$$\sum_0^\infty u_n z^n ,$$

sumable (B), en un conjunto $E(z)$, ella es *sumable* $|B|$, si las integrales

$$\int_0^\infty e^{-t} |u^{(\lambda)}(z_1 t)|\, dt \quad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots)$$

son convergentes.

De la relación

$$\frac{dt^\lambda}{d^\lambda} u(z,t) = z^\lambda F^\lambda(zt) = z^\lambda \sum_0^\infty u_{n+\lambda} \frac{(zt)^n}{n!} =$$

$$= j_1 z'^\lambda \sum_0^\infty u'_{n+\lambda} \frac{(tz')^n}{n!} + j_2 z''^\lambda \sum_0^\infty u''_{n+\lambda} \frac{(tz'')^n}{n!} =$$

$$= j_1 z'^\lambda A^{(\lambda)}(tz') + j_2 z''^\lambda B^{(\lambda)}(tz'')$$

se tiene

$$\int_0^\infty e^{-t} u^{(\lambda)}(z_1 t)\, dt = j_1 z'^\lambda \int_0^\infty e^{-t} A^{(\lambda)}(tz')\, dt + j_2 z''^\lambda \int_0^\infty e^{-t} B^{(\lambda)}(tz'')\, dt ;$$

de donde resulta que: *es condición necesaria y suficiente para que la serie* [1] *sea sumable* $|B|$, *que sus componentes isótropas sean sumables* $|B|$.

Teorema X. — *Si la serie* [1], *es sumable* $|B|$ *en el punto* $z_0 = j_1 z' + j_2 z_0''$, *ella es sumable* $|B|$ *en el rectángulo formado por*

las rectas isótropas $x = y$, $y = -x$, *y las paralelas a éstas por el punto* z_0. De las hipótesis, resulta que las series

$$\sum_0^\infty u_n' z'^n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty u_n'' z''^n ,$$

son sumables $|B|$, en los puntos z_0' y z_0'' respectivamente; por tanto, según un teorema de M. Borel, ellas son sumables $|B|$ respectivamente en los segmentos

$$(O \leq z' \leq z_0') \quad , \quad (O \leq z'' \leq z_0'')$$

De la relación

$$\sum_0^\infty u_n z^n = j_1 \sum_0^\infty u_n' z'^n + j_2 \sum_0^\infty u_n'' z''^n$$

y según lo anterior, resulta la sumabilidad $|B|$ de la serie propuesta.

20. Rectángulo de sumabilidad (B). — Sea una serie

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n \qquad [1]$$

convergente, en un cierto rectángulo isótropo de convergencia, finito.

La integral

$$P(z') = \int_0^\infty e^{-t} V_1(z' t)\, dt$$

converge absolutamente en los intervalos $(0, r_1)$ y $(0, r_1')$, donde

$$r_1 = \frac{1}{\overline{\lim_{b \to \infty}} \frac{1}{b} \log \left| V_1\left(b e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right|} \quad , \quad r_1' = \frac{1}{\overline{\lim_{b \to \alpha}} \frac{1}{b} \log \left| V_1\left(b e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\right|}$$

y

$$z' = \rho e^{i\theta} \quad , \quad b = t z'$$

θ toma los dos valores:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

Del mismo modo, la integral

$$Q\,(z'') = \int_0^{\infty} e^{-t}\, V_2\,(z''\,t)\,dt$$

converge absolutamente en los intervalos $(0\,,r_2)$ y $(0\,,r_2')$, donde

$$r_2 = \frac{1}{\overline{\lim_{b\to\infty}} \frac{1}{b} \log\left| V_2\left(b\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\right|}\,, \qquad r_2' = \frac{1}{\overline{\lim_{b\to\infty}} \frac{1}{b} \log\left| V_2\left(b\,e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\right|}$$

Se tiene por tanto

$$f\,(z) = j_1\,P\,(z') + j_2\,Q\,(z'')$$

cuando los puntos z' y z'' pertenecen respectivamente a sus intervalos $(r_1\,,r_1')$ y $(r_2\,,r_2')$.

Si consideramos el rectángulo isótropo cuyos lados paralelos al eje $0\,z''$, dista del origen:

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \rho_1' = \frac{r_1'}{\sqrt{2}}\,,$$

y los lados paralelos al eje $0\,z'$, distan del mismo

$$\rho_2 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}\,, \qquad \rho_2' = \frac{r_2'}{\sqrt{2}}\,,$$

la serie [1], resulta entonces *sumable* $|\,B\,|$ en todos los puntos z interiores de este rectángulo.

A este rectángulo isótropo se reduce por tanto, el polígono de sumabilidad $|\,B\,|$ de Borel, cuando la serie [1] es una serie de potencias de una variable compleja hiperbólica. El rectángulo así determinado llamaremos, *rectángulo de sumabilidad* (B).

El rectángulo de sumabilidad (B) contiene en su interior el *rectángulo de convergencia.*

De lo anterior se deduce que: *toda serie de potencias* [1] *es sumable* $|\,B\,|$ *en el interior de su rectángulo de sumabilidad* (B) *y no es sumable en los puntos exteriores al mismo.*

De aquí se deduce: *Toda serie de potencias define en los puntos*

interiores de su rectángulo de sumabilidad, una función compleja $f(z)$, *de la variable compleja hiperbólica* z

$$f(z) = \sum_0^\infty u_n z^n , \qquad [1]$$

y que da la prolongación analítica fuera de su rectángulo de convergencia.

Observación. — Cuando sobre los ejes reales $0z'$ y $0z''$, no existen puntos singulares de las funciones reales

$$P(z') = \sum_0^\infty u_n' z' \quad , \quad Q(z'') = \sum_0^\infty u_n'' z'' ,$$

la serie de potencias

$$f(z') = \sum_0^\infty u_n z^n = j_1 P(z') + j_2 Q(z'')$$

es sumable (B), en todo el plano.

Ejemplo

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots$$

21. — El dominio de sumabilidad $|B|$ de la serie derivada

$$u_1 + 2u_1 z + 3u_2 z^2 + \ldots , \qquad [2]$$

es el mismo rectángulo de sumabilidad $|B|$ de la serie [1], y su suma es la derivada $f'(z)$ de la suma $f(z)$ de la serie [1].

También subsiste el teorema siguiente.

La función $f(z)$ definida por la serie [1] en su rectángulo de sumabilidad (B), tiene una sucesión de derivadas $f^{(n)}(z)$, definidas por las series derivadas correspondientes, sumables $|B|$, en el mismo rectángulo de sumabilidad.

Siguiendo este mismo método se puede extender igualmente, a las series de funciones holomorfas, todos los resultados del capítulo anterior.

MATEMATICA Y POESIA [1]

POR

JOSE BABINI

Al elegir el tema de esta disertación, no nos animó el deseo de declamar frases hechas, como la tan oída: En todo matemático hay un poeta, ni el de proclamar una supuesta identidad entre matemática y poesía; sino simplemente el de exponer, sin duda en forma fragmentaria y hasta con carácter provisorio, algunas reflexiones acerca de las posibles vinculaciones y características comunes de estos dos campos específicamente distintos de la actividad creadora, de estos dos productos esencialmente diferentes del espíritu humano.

Toda manifestación espiritual, cualquiera sea su naturaleza, puede considerarse bajo dos aspectos distintos. Un primer aspecto, que podríamos denominar ontológico, por el cual esa manifestación se considera como ser, como producto acabado de un determinado proceso, como residuo de una determinada actividad creadora, en una palabra, como algo « hecho ».

Un segundo aspecto, en cambio, por el cual esa manifestación se considera no ya como ser, producto o residuo, sino como un devenir, como un proceso, como una actividad, en una palabra, como algo que « se hace ». Considerando este proceso en el hombre, como persona aislada, estamos frente al aspecto psicológico de la manifestación espiritual, mientras que si se considera este proceso en el hombre, como ser sumergido en una comunidad, como parte integrante de la humanidad, estamos entonces frente al aspecto histórico-cultural.

Al considerar el primer aspecto, surge de inmediato la dificultad de concebir la existencia misma de la manifestación espiritual, fue-

(1) Disertación pronunciada en Santa Fé, en Agosto de 1935, bajo los auspicios de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé).

ra de todo proceso temporal, ya en el hombre, ya en la humanidad; independiente del proceso psicológico o histórico por el cual esa manifestación asomó a la realidad. Surge, en efecto, inquietante, la pregunta: ¿Cómo es posible concebir una producción matemática o una creación poética, prescindiendo del matemático que la produjo o del poeta que la ha creado, independiente de la época histórica en que nacieron o del clima cultural que las cobija? La pregunta es vieja como el hombre y sus respuestas tan viejas como la filosofía.

Respecto a la matemática, la respuesta en sentido afirmativo no parece difícil. En efecto: en la multiforme realidad en la que el hombre vive, es fácilmente concebible la existencia de ciertos objetos bien individualizados y diferenciados: números, puntos, funciones, etc., que constituyen un mundo con caracteres propios. El conjunto de pensamientos que enuncian juicios cuyos sujetos son esos objetos matemáticos es lo que precisamente llamamos matemática. La condición anterior es necesaria, pero no suficiente, para que un pensamiento pertenezca a la matemática, pues pensamientos como éstos: *El cuadrado es fiel. Los logaritmos son humildes*, que cumplen esa condición, no enuncian juicios matemáticos. Es que los pensamientos están sujetos a una peculiar y necesaria polaridad: ellos son verdaderos o falsos, de ahí que completaríamos la definición anterior expresando que esos pensamientos han de ser verdaderos.

Ahora bien, la propiedad que se enuncia con uno de aquellos pensamientos, por ejemplo con el comúnmente denominado teorema de Pitágoras, puede perfectamente concebirse como independiente del tiempo y válida para cualquier persona o época. Es cierto que a pesar de ser la verdad de los pensamientos científicos, en general, y de los matemáticos en particular fácilmente controlable, existen personas, y aún podríamos concebir épocas o culturas, para las cuales estos medios de control caen fuera de su alcance y no logran entonces captar la verdad de esos pensamientos, llegando a veces hasta a invertir su sentido. Pero este hecho no niega la verdad objetiva de los juicios, como tampoco la existencia de los ciegos de nacimiento niega la objetividad de la luz.

¿Podemos, ahora, concebir la poesía como algo semejante a ese mundo de pensamientos verdaderos, independientes del tiempo y de las personas, que constituye la matemática? Entendemos que sí. Por de pronto, existen obras poéticas, en prosa y en verso, que, claro es, no constituyen la poesía como tampoco los tratados y re-

vistas donde yacen depositados, y a veces sepultados, los conocimientos matemáticos, constituyen la matemática. Existe, además, en la poesía algo comparable con los objetos matemáticos: son aquellos elementos esencialmente poéticos, productos de una misteriosa simbiosis del sentido con el sonido, son aquellos juegos con las palabras, con las sílabas, con los diptongos, son las imágenes poéticas, son las figuras del pensamiento, los tropos...

Y así como el conjunto de los objetos matemáticos no constituye la matemática, tampoco es el conjunto de esos elementos el que constituye la poesía, sino es el halo que los envuelve, y les confiere el carácter de bello, en una palabra, es ese algo que los convierte en valores estéticos. De igual modo, entonces, que el carácter de verdadero hace de ciertos pensamientos una ciencia, el carácter de bello hace de ciertos valores un arte. Y esos valores estéticos que en la poesía surgen a través de aquellos elementos etéreos, vagos y nebulosos, de aquellas figuras e imágenes, pueden concebirse con la misma objetividad, con la misma independencia respecto al tiempo, a las personas y a las épocas, de los pensamientos matemáticos; en una palabra, son reales en el mismo sentido que los pensamientos matemáticos.

El distingo que frecuentemente se formula, de ser más fácil entender un teorema matemático, cuando se explica, que gozar ante un verso, se debe, en realidad, al término «explicar»; pues mediante la explicación se extiende ante nuestra vista intelectual todo el armazón lógico que sostiene el teorema, se lo descompone en sus partes elementales y se muestra el encadenamiento de las mismas. Es ésta, también, la razón que hace parecer más absoluta la verdad de un teorema matemático que la belleza de una imagen poética.

Concebidas, pues, la matemática y la poesía, bajo este aspecto ontológico, analicemos si entre ellas existe alguna conexión, alguna vinculación. A primera vista, por la naturaleza de sus objetos, bien específicos y distintos, por las características de cada uno de esos mundos, tan diferentes entre sí, parecería que no existiera entre ambas manifestaciones conexión alguna. Pero si profundizamos algo más el análisis encontraremos que ambos campos presentan algunas determinaciones generales, algunas categorías comunes que, sin embargo, se presentan en cada campo con fisonomía propia, como materiales, que, provenientes de un yacimiento subterráneo común, afloraran a la superficie bajo formas distintas.

Entre esas categorías comunes, la más significativa es, sin duda,

el ritmo que por igual se presenta en la matemática y en la poesía.

En la poesía el ritmo es un elemento constitutivo, es conocida la definición del verso como unidad rítmica, pero Henriquez Ureña, al comentar esa definición, agrega que « esa definición es justa, siempre que se recoja estrechamente dentro de la noción limpia y elemental del ritmo, apartando de sí cualquier enredo con la idea de acento o de tono o de cantidad, cualquier exigencia de igualdades o de relaciones matemáticas ». Se ve claramente como, en este comentario, se suprime expresamente del ritmo, en la poesía, toda alusión a los conceptos matemáticos y a aquella « métrica » que tanta importancia tiene para la preceptiva y que constituyó, en algún momento, y aún hoy para muchos, una nota esencial en la poesía.

En cambio, ¿cuándo y cómo se presenta el ritmo en la matemática? Este aparece cada vez que directamente o transformada interviene la serie natural de los números y su sucesión ordenada, cada vez que se trata del proceso del contar que es, bajo la infinita variedad de sus transformaciones, un elemento fundamental en toda la matemática.

Pero, mientras en la poesía el ritmo es una « noción limpia y elemental » que conserva todo el contenido y la variedad que le confiere su estado original y toda la riqueza que encierra su estado naciente, en la matemática el ritmo se ha cristalizado, se ha reducido a un esquema, se ha subordinado a la idea de sucesivo, en una palabra, se ha convertido en un concepto.

Estamos aquí ante uno de los hechos que al mismo tiempo que explican la naturaleza de las conexiones posibles entre la matemática y la poesía, muestran también la esencial distinción entre ambas manifestaciones espirituales. Así un mismo elemento, el ritmo, aparece en cada una de ellas con fisonomía propia, hasta podría decirse ofreciendo una personalidad diferente, producida por el proceso totalmetne distinto a que se ha encontrado sometido ese elemento común en el seno de cada una de esas manifestaciones.

La idea de ritmo, que en la poesía, en virtud de la esencia del proceso poético, adquiere la mayor plasticidad y amplitud posibles, al ser sometida al proceso lógico, característico de toda ciencia y que en la matemática se presenta en su forma más clara y pronunciada, esa idea se transforma en un espectro, es decir, en un concepto. Todo proceso lógico de abstracción, todo proceso de formación de conceptos hace perder plasticidad a las ideas, es como una proyección de un cuerpo sobre un plano, que hace más precisos los

contornos, pero anula toda noción de volumen. Aplicar el proceso lógico es lanzar la red en un mar agitado: todo el líquido móvil, vivo, fluye y desaparece por las mallas y sólo queda en la red algún objeto fijo, bien preciso, pero muerto. Todo el proceso lógico tiende a claridad y precisión, todo el proceso poético tiende, en cambio, a explotar la riqueza de los contenidos y las posibilidades de expresión. Por eso también todo concepto matemático impresiona como algo desprovisto de vitalidad, mientras en las imágenes poéticas se siente vibrar la vida. La matemática se construye con conceptos, la poesía se construye con sueños.

Algo semejante a lo que ocurre con el ritmo sucede con otros elementos, que en su raíz profunda mantienen una conexión entre la matemática y la poesía, pero que aparecen en estas manifestaciones espirituales cada uno con su propia personalidad. Así la simetría, el orden, la medida, etc. Se explica así que en los casos en que la diferencia de personalidad no esté bien acentuada y que un elemento poético, por ejemplo, adquiere un acento marcadamente matemático, pierde ese elemento su valor como ingrediente poético y se convierte en un elemento formal, no esencial.

El medio de expresión puede servirnos también para establecer conexiones y diferencias entre la matemática y la poesía. En efecto, la poesía es el único arte cuyo medio de expresión es el de la ciencia, es decir el lenguaje. Sin embargo, la ciencia y la poesía, aun utilizando los mismos elementos: las palabras, constituyen dos efectos supremos y distintos del lenguaje ordinario.

Así como el andar ordinario, el paso normal, se convierte en danza cuando se le somete a una depuración y ajuste rítmicos; mientras que si se le desvitaliza, abstrayendo de él lo esencial, se convierte en algo simple y mecánico; de igual modo cuando se tiende con el lenguaje ordinario a elevar su contenido expresivo, su musicalidad, cuando se aprovecha la riqueza en significados de las palabras, cuando se hace vaporoso, ese lenguaje se convierte en lenguaje poético; mientras que si se tiende a hacer el lenguaje conciso y preciso, con sentido único, economizando las palabras, ese lenguaje se convierte en lenguaje científico.

Y en este proceso de transformación del lenguaje ordinario en lenguaje científico no sólo pierden las palabras su rico contenido en significados y su poder de expresión, que en la poesía son constitutivos, sino que en la matemática, que es en ese sentido la ciencia más avanzada, las mismas palabras se eliminan y aparecen en su lugar los símbolos como máxima depuración del lenguaje.

La intensidad con que en las distintas ciencias se manifiesta este poder de transfiguración de las palabras en símbolos, puede establecer entre ellas una perfecta jerarquía, que partiendo de ciencias como la historia, sociología y psicología, que no podrían describir sus hechos y fenómenos con lenguaje simbólico, y pasando por la biología, la química y la física, que con intensidad distinta utilizan símbolos, llega hasta la matemática, donde el símbolo reina soberano y en la que, mediante su rico simbolismo y los recursos de la llamada lógica matemática, no sólo pueden expresarse totalmente con lenguaje simbólico los juicios propiamente matemáticos, sino también aquellos juicios y expresiones intermediarios indispensables en toda exposición científica. Y es interesante observar como actualmente un grupo de físicos teóricos trata de introducir esta lógica, que hasta ahora se reservaba a la matemática, también en la física; tal es la convicción de las ventajas del simbolismo en la construcción científica.

La poesía, en cambio, no sólo mantiene y juega con la riqueza en significados de las palabras y hasta con su musicalidad y sonido, sino que, en virtud de una característica del proceso poético, en algunos casos las mismas palabras se convierten en símbolos, es decir, se logra, aunque sea provisoriamente, conferirle un significado más. Se nota con la función simbólica, el mismo hecho anotado al referirnos al ritmo. Partiendo de un fondo común, que el mismo término empleado denuncia, la función simbólica adquiere en cada campo una fisonomía distinta. En la matemática la palabra se reduce o simplemente se elimina, para ser sustituída por un símbolo, en la poesía es la misma palabra la que ejerce la función de símbolo.

Con la metáfora ocurre algo semejante. La metáfora es un elemento constitutivo en la poesía; alguien dijo que toda la poesía es metáfora, mientras que en la ciencia su papel es accesorio y su intervención obedece a factores circunstanciales. Cuando aparece un fenómeno nuevo y, evidentemente, el lenguaje ordinario no tiene palabras para expresarlo, debe naturalmente recurrirse a otras palabras para describirlo, y entonces se acude a aquellas palabras que expresan un significado semejante o que la imaginación le confiere ese carácter de semejanza, y así surge la metáfora. Pero en la ciencia conserva siempre su carácter de ficción, mientras que en la poesía la metáfora es una realidad.

En la matemática también se usa la metáfora. Cuando el geómetra, ante dos funciones que además de poseer un valor común sa-

tisfacen ciertas otras condiciones, dice que esas funciones tienen un *contacto de cierto orden,* ya está empleando un lenguaje metafórico; pero cuando al llevar este hecho al terreno geométrico, dice que las curvas correspondientes son *osculadoras,* vale decir que se besan, la metáfora ya ha adquirido un rango poético. Pero en la matemática este lenguaje metafórico no pasa de ser expresión verbal y, por lo tanto, exento de todo peligro, pues el simbolismo matemático evita toda confusión y en definitiva, pese a la cautivadora metáfora, el concepto de curvas osculadoras no es más que un grupo, bien prosaico, por cierto, de igualdades entre símbolos.

En las ciencias, en cambio, que no poseen el simbolismo tan perfeccionado, ni el tecnicismo tan completo de la matemática, el lenguaje metafórico que necesariamente aparece en ellas, puede constituir algún peligro, de ahí la tendencia actual a eliminarlo, ya sea mediante simbolismos o por definiciones más precisas.

Quizás podría surgir alguna nueva conexión entre la matemática y la poesía, comparándolas por intermedio de otras manifestaciones espirituales conexas en alguna forma con ambas. En este sentido la música serviría admirablemente de *trait d'union,* pero este nuevo análisis nos alejaría un tanto del marco de esta disertación.

Consideremos ahora la matemática y la poesía en el aspecto que denominamos psicológico, es decir, el proceso que se realiza en el hombre frente a esas manifestaciones espirituales. Desde este punto de vista una de las primeras cuestiones que se presentan es la que se refiere al proceso de creación, invención o descubrimiento.

Tal cuestión es muy compleja y quizás no muy estudiada aún. Respecto a ella sólo puede decirse que existe cierta similitud entre los procesos creadores de la matemática y de la poesía. En una encuesta reciente la mayoría de los matemáticos interrogados declararon que sus descubrimientos o creaciones fueron el resultado de inspiraciones semejantes a las de los artistas.

No se trata, claro es, de concebir la inspiración como un don divino ni una revelación súbita que se logra con tal de adoptar una actitud más o menos romántica; sino el resultado de un prolongado esfuerzo que, aparentemente estéril, encubre el fruto de la creación que de pronto nace. Por otra parte, no es nuevo declarar que en la invención matemática y en la invención científica en general, interviene en gran medida la imaginación, ese ingrediente que se supone monopolizado por los poetas. Por ejemplo, el fecundo e importante concepto de coordenada, ¿qué es sino un genial esfuerzo

de imaginación al admitir una correspondencia entre dos entes distintos como son el punto y el número?

Sobre todo en los matemáticos de tipo creador, más que en los de tipo crítico, la imaginación juega un papel importante. Una prueba más de esta conexión psicológica entre la matemática y la poesía, la ofrece otro resultado de la encuesta ya citada, que comprobó la existencia de muchos matemáticos que cultivan la poesía, aunque en menor grado que los que cultivan la música.

Pero dejemos los matemáticos y los poetas y consideremos, dentro de este orden de ideas, la cuestión más general que se refiere a la existencia en el alma humana de raíces comunes a ambas manifestaciones espirituales, contraparte psicológica de la existencia de aquellas categorías comunes que analizamos anteriormente.

El estudio de las conexiones psíquicas entre los distintos valores, ha sido realizado en forma magistral por Spranger en su libro « Formas de vida », donde, analizando el desarrollo de la personalidad a través de la adhesión a un determinado valor, muestra la conexión de ese valor con todos los demás, tal como se verifica psicológicamente. Claro es que esa obra fundamental no se refiere en particular a la matemática y a la poesía, sino a las conexiones más generales entre los valores lógicos y los valores estéticos.

En este orden de ideas, y por supuesto en un plano distinto, pero más directamente vinculado con la matemática y la poesía, publicamos hace un par de años, en la revista *Nosotros*, un ensayo, en el que, con el objeto de mostrar las conexiones que la matemática mantiene con otras actividades del espíritu, analizábamos una de las más extraordinarias novelas contemporáneas: *Ulises*, del novelista y poeta James Joyce. Decíamos en ese ensayo: « En el universo ulisiano de Joyce, las escasas y fugaces apariciones de la matemática revisten un singular interés; pues el profundo análisis psicológico que Joyce realiza y el fino estudio del espontáneo fluir de la conciencia, descubren las raíces matemáticas que insiden en el alma humana: ritmo, orden, simbolismo, combinación, etc., y muestran las íntimas conexiones que esta ciencia, abstracta y desvitalizada, mantiene con el hombre.

La técnica de Joyce, al descubrirnos, libres y desnudas, las conciencias humanas, permite analizar como esas conexiones se manifiestan en algunos de sus personajes de temperamentos distintos, y la circunstancial independencia que ellos guardan con la ciencia matemática — en *Ulises* no figura ningún matemático — presta mayor valor a este análisis, demostrando el carácter esencialmente humano de esas conexiones ».

Sigue luego el comentario a ciertos pasajes de la novela: algunos de ellos muestran cómo un poeta, el autor de *Ulises,* es decir, el mismo Joyce, reacciona artísticamente ante ese mundo de objetos matemáticos, que él conoce bien, pues Joyce tiene una sólida cultura matemática, y como los transforma imprimiéndoles con su fantasía y su imaginación una nueva vida, ya jugando con ellos o ya explotando su carácter preciso y descarnado, cuando las exigencias estéticas así lo requieren; pues toda esta grandiosa obra es un esfuerzo que intenta expresar artísticamente hasta en sus más nimios detalles, la multiforme realidad del mundo exterior y del fluir de la vida interior.

Otros pasajes comentados se refieren a los procesos psíquicos de los personajes de la novela, procesos que pueden seguirse fácilmente dada la técnica especial y extraordinaria que emplea Joyce, y uno de esos pasajes, en el que interviene uno de los protagonistas de la novela llamado Stephen, y que precisamente es un poeta, tiene relación con nuestro tema.

Decíamos en ese comentario: « En un temperamento artístico, como el de Stephen, debía ser el simbolismo con su capacidad en despertar imágenes y metáforas, con su amplia posibilidad de interpretaciones, el aspecto de la matemática más afín a él. En el episodio de la escuela esto se comprueba.

Después de la clase, cuando los niños en bandada se lanzan fuera del aula a correr y jugar, uno de ellos se acerca a Stephen con el cuaderno de aritmética abierto, a fin de que le explique unos problemas que no sabe resolver. Y mientras Stephen, maquinalmente, resuelve uno de ellos, surgen en su mente las imágenes; al escribir los símbolos, su imaginación les infunde vida, y las cifras bailan su grave danza mora con sus pequeños bonetes bizarros de cuadrados y cubos. El poeta conserva esa imagen, pues más tarde las columnas árabes de una sala de la biblioteca evocan en él el recuerdo de la danza de las nueve cifras con los bonetes de sus exponentes ».

De paso observemos cómo en la formación de esa imagen, brotada en un espíritu culto, el de Stephen, o, si Vds. prefieren, el de Joyce, ha influído el origen histórico de las cifras.

Otra cuestión que se vincula con el aspecto que estamos tratando, es la que se refiere a los ensayos intentados para abordar la experiencia estética, considerada como un proceso psíquico, por la matemática.

Se trataría, en nuestro caso, de medir con números la impresión

que nos produce la lectura de una obra poética o, mejor dicho, de comparar, desde este punto de vista, distintas obras poéticas.

Citemos a este respecto el ensayo realizado por el matemático norteamericano Birkhoff, quien propuso en el Congreso de Bologna del 28, una fórmula y algunas aplicaciones de la misma. Considera este autor en la experiencia estética, ante todo, un esfuerzo preliminar de atención, necesario para el acto de la percepción, y que aumenta proporcionalmente a lo que él llama la complejidad C del objeto; luego el valor estético o medida estética M que recompensa ese esfuerzo, y por último el hecho de darse cuenta de una cierta simetría o armonía caracterizada por un cierto orden O más o menos disimulado y que parece necesario en el esfuerzo estético.

El autor supone estos elementos como medibles y deduce que la medida M es la densidad de las relaciones de orden en el objeto, es decir, $M = O : C$. Deduce luego, por consideraciones fisiológicas y psicológicas la manera de determinar los valores de C y de O. Así el esfuerzo de atención C está acompañado por un sentimiento de tensión variable que puede expresarse como la suma de las tensiones que acompañan determinados ajustes automáticos $a, b, c \ldots$ multiplicadas cada una de ellas por el número de veces que se presentan $m, n, p \ldots$. Son, por ejemplo, en una obra poética, las tensiones que acompañan la lectura de cada sílaba, o de cada verso, las tensiones producidas por los silencios, por las repeticiones, etc. De igual manera procede para determinar el orden O, utilizando el sentimiento producido por determinadas asociaciones $a', b', c' \ldots$ y el número de veces que esas asociaciones se presentan $m', n', p' \ldots$.

Es claro que estas nociones demasiado generales dan sólo una pálida idea de lo interesante y completo que es este estudio y las aplicaciones del mismo. Pero de cualquier manera debe entenderse que todo ensayo de esta naturaleza no puede dar razón de la experiencia total. La matemática es como un reactivo: produce su efecto cuando la sustancia a la que ataca tiene afinidad con ella o ataca la sustancia sólo en la porción en que esa afinidad se manifiesta. De ahí que la experiencia estética sólo en parte podrá ser abordada por la matemática, en la parte que ella tenga de afín con el proceso lógico. Este proceso es un juego de análisis y síntesis, es un proceso de sumas y de partes, pero en la experiencia estética hay siempre algo más, relacionado con la estructura totalitaria de la misma, algo vinculado con el todo que escapa a ese juego, algún residuo inasequible al proceso lógico.

De manera que la experiencia estética no se podrá abordar sólo

con la matemática, sino además con otros recursos de orden más psicológico: descripciones, análisis esenciales, etc.

Si, por último, consideramos la matemática y la poesía en su aspecto histórico-cultural, nos encontramos, al analizar el desarrollo histórico de la matemática, frente al mismo hecho anotado al considerar los aspectos anteriores.

La existencia de categorías comunes a la matemática y a la poesía, la existencia de raíces comunes a ambas manifestaciones en lo profundo del alma humana, explica cómo muchos conceptos matemáticos fueron creados e hicieron su irrupción en la historia envueltos en esa atmósfera vaga que caracteriza los valores estéticos, producida por efectos de la intuición sensible, o de las metáforas empleadas o como resultado de la fantasía creadora.

Pero luego, poco a poco, el proceso lógico fué cumpliendo inexorablemente su obra, depurando la ciencia de todos los factores extramatemáticos, eliminando de las ideas todo contenido imaginativo, todo elemento poético, hasta convertirlas en conceptos claros y precisos.

Este proceso de depuración ha exigido en muchos casos esfuerzos de siglos para completarse, tan arraigados estaban los elementos extramatemáticos que acompañaban al concepto matemático. Piénsese en el concepto de límite y sobre todo en el concepto de infinito, ese ente complejo tan profundamente arraigado en el alma humana, caro a filósofos, poetas y matemáticos.

La matemática es la ciencia del infinito, ha definido con justeza Weyl, y la importancia de este concepto en el desarrollo histórico de esa ciencia es tan considerable, que toda la historia de la matemática puede concebirse como una serie de accidentadas aventuras tendientes a precisar y aclarar el concepto de infinito, siempre reprimido o eliminado y siempre de nuevo presente, como los genios malos de las fábulas, bajo otro disfraz.

Las llamadas crisis de la matemática, una de las cuales se desarrolla en nuestro tiempo, no son otra cosa que las perturbaciones producidas por ese huésped poco grato y las tentativas pacíficas o violentas para desterrarlo del campo matemático.

A través del aspecto histórico notamos, una vez más, cómo el proceso lógico trata de despoetizar, permítasenos el neologismo, la matemática, vale decir, eliminar de la matemática todos los elementos de carácter poético que pudieran obscurecer el concepto matemático.

Hay, sin embargo, un momento en la historia de la matemática, en el que, aparentemente, la matemática y la poesía marchan perfectamente de acuerdo. Es en la época denominada por Smith, la « época de la poesía », en la matemática, considerándola como una etapa psicológica realizada por el pensamiento matemático en su desarrollo histórico, comparable a la etapa de nuestra existencia juvenil, en la que estamos conducidos casi fatalmente a escribir versos.

En efecto, en el período histórico que tiene por escenario la India de los siglos V a XII, todas las obras de carácter astronómico y matemático se escribieron en verso; en ellas se expresaron las cuestiones más simples, con ese lenguaje metafórico y esa exuberante fantasía que caracteriza los pueblos orientales, y se eligieron, con preferencia, como temas de los problemas a resolver, aquellos que mejor se adaptaban a ser expresados en forma poética.

He aquí, enunciados en los más variados tonos poéticos, algunos problemas que exigen la resolución de ecuaciones de primero o segundo grado. En tono vernal: « Un quinto de un enjambre de abejas, se posa sobre una flor de kadamba, un tercio sobre una flor de silindha, el triple de la diferencia entre esos dos números vuela sobre una flor de kutaja y una abeja, sola, revolotea en el aire, atraída por el perfume de un jazmín y de un pandamus. Dime hermosa niña, el número de las abejas ».

En tono erótico: « En una lucha amorosa se rompió un collar de perlas, un sexto de las perlas cayó al suelo, un quinto quedó en el lecho, la zagala salvó un tercio, un décimo guardó consigo el mancebo y seis perlas quedaron enhebradas. Dime, ¿cuántas perlas tenía el collar? ».

En tono épico: « En la mitad del combate, el furioso hijo de Prit'ha tomó un cierto número de flechas para matar a Carna, empleó la mitad en su defensa, el cuádruple de la raíz cuadrada contra los caballos, seis flechas taladraron al cochero Salya, otras tres desgarraron el parasol de Carna y rompieron su estandarte y su arco, y una le atravesó la cabeza. ¿Cuántas flechas tenía el hijo de Prit'ha? »

Pero si se analiza la matemática hindú, se nota que este lenguaje poético es simplemente un disfraz, obligado por la forma rimada de los textos y por la costumbre de usar esos problemas como adivinanzas en justas poéticas o en reuniones sociales. En cambio, interesan profundamente al matemático hindú las operaciones aritméticas, las transformaciones algebraicas, los métodos de resolución de los problemas.

Así lo expresa Brahmagupta, del siglo VII: « Estos problemas se proponen simplemente por placer; el sabio puede, con las reglas aquí dadas, inventar centenares o resolver otros. Como el brillo del sol sobrepasa al de las estrellas, así el hombre sagaz oscurecerá la gloria de otros hombres, sabiendo proponer problemas algebraicos y sobre todo resolviéndolos ».

No sólo se complacían los hindúes en realizar cálculos numéricos y transformaciones algebraicas, sino también demostraban un afán especial en clasificar los problemas, las operaciones aritméticas y los métodos de resolución. Así, por ejemplo, Bhaskara, del siglo XII, distingue, entre las elementales, no menos de veinte operaciones.

Los problemas geométricos de los hindúes no constituyeron excepción, pues en ellos las determinaciones de longitudes, áreas y volúmenes fueron un pretexto más para resolver cuestiones algebraicas. Hasta en los teoremas geométricos, de esencia, al parecer, opuesta al de los algebraicos, se nota ese poder de la combinación y de la transformación que caracteriza la matemática hindú. Así, el teorema que expresa la equivalencia entre el círculo y el rectángulo, cuyos lados son la semicircunferencia y el radio, lo « demuestran » mediante una figura y este lacónico comentario: ¡Mira! En efecto, basta mirar la figura, que representa una ingeniosa descomposición geométrica, para comprobar el teorema, de la misma manera, como una transformación algebraica permite comprobar un resultado aritmético.

De cualquier modo y a pesar del aspecto puramente formal que presenta la poesía en la matemática hindú, no deja de ser significativo que estos pueblos orientales: hindú, persa, árabe, pueblos de poetas, prestidigitadores y malabaristas, pueblos que concibieron los maravillosos cuentos de las Mil y una noches, pueblos que contaron con un Omar Khayyam, autor de las « Ruba'i », de igual fama como poeta, astrónomo y algebrista; no deja de ser significativo que esos pueblos hayan creado el álgebra, rama de la matemática en la que se manifiesta con mayor vigor el juego de las combinaciones y transformaciones, a veces con resultados sorprendentes, y a la que se ha conferido, según la tradición popular, el carácter de arte mágico, al exagerar la creencia en su poder demostrativo.

Quisiéramos, para terminar, referirnos a otro aspecto vinculado con el desarrollo histórico-cultural de la matemática y la poesía. Sin aceptar íntegramente la ingeniosa e impresionante concepción

de Spengler, no hay duda que cada época cultural se caracteriza por una marcada preferencia hacia ciertos valores o sistemas de valores, de ahí que todas las manifestaciones del espíritu en una determinada época, muestren una misma tendencia.

Y en nuestra época una característica que se muestra en todas las manifestaciones del espíritu es la tendencia hacia la objetividad, es decir, hacia la depuración y delimitación de cada esfera de valores y de cada mundo de objetos específicos; sin pretender ya mezclar esferas distintas, fundir o confundir objetos de mundos diferentes, sin pretender, por ejemplo, resolver problemas éticos con la ciencia, problemas sociales con la literatura, hacer biología con la física o hacer de todo con la matemática.

No hay duda que en esa tendencia fué la matemática la precursora. En ella ese afán se muestra desde hace más de un siglo y puede decirse que toda la matemática actual, desde el advenimiento de las geometrías no euclidianas, primer fruto de esa tendencia, es el resultado de ese afán.

Hay en la historia de la matemática un incidente de escasa importancia entre dos grandes matemáticos: Fourier y Jacobi, que podría tomarse como índice primero de esa tendencia. Fourier, uno de los creadores de la Física matemática, para quien la matemática sólo tenía valor como medio de descubrimiento de las verdades físicas y para quien el estudio profundizado de la naturaleza era la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos, al anunciar a la Academia de París unos trabajos de Jacobi sobre las funciones elípticas, manifestó que las cuestiones de filosofía natural debían ser el objeto principal de la meditación de los geómetras.

Cuando Jacobi, por intermedio de un informe de Poisson, conoció esta manifestación, escribió a Legendre (estamos en 1830): « El señor Poisson no debía haber reproducido una desgraciada frase del señor Fourier que nos reprocha, a Abel y a mí, por no ocuparnos del movimiento del calor » (el problema del movimiento del calor, gloria máxima de Fourier, fué el modelo típico de una construcción físico-matemática, que hoy podríamos decir simplemente de una construcción física). « Es cierto que el señor Fourier estima que la finalidad principal de la matemática es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería saber que la única finalidad de la ciencia es el honor del espíritu humano y que en consecuencia una cuestión de la teoría de los números tiene un valor tan grande como una cuestión de los sistemas de los mundos ».

Quitemos a la frase de Jacobi todo lo que pueda tener de pretensión romántica, fruto, por otra parte, de la época en que ha sido escrita; no hay duda que ella muestra claramente el principio de una reacción contra la tendencia avasalladora que reinaba en esa época de convertir la matemática en una doncella de la filosofía natural y en cambio tratar de independizarla de todo lo que no fuera propiamente matemático, sin pretender buscar una finalidad fuera de ella, en una palabra, a hacerla más objetiva.

¿Esta tendencia hacia la objetividad que en la matemática se ha logrado casi plenamente, se nota también en la poesía actual? Dejando a Vds. todo el margen posible para las reservas que nuestra condición de profanos requiere, creemos que gran parte de los esfuerzos actuales de la poesía muestran esa tendencia hacia la objetividad. Hoy se habla y se discute sobre poesía pura, los poetas van a la busca del verso puro y hasta esa extrañeza, a veces repulsión, que muchos sienten ante ciertas creaciones poéticas contemporáneas, no son más que índices del espíritu de renovación que anima la poesía actual y que refleja la tendencia hacia la objetividad.

Es claro que esta tendencia que, como una exigencia de la hora presente, se manifiesta en todas las actividades del espíritu, se presenta en cada una de ellas con intensidad distinta y se ha de lograr también en medida diferente. No hay duda que la claridad y sencillez de los objetos y conceptos científicos, y en especial matemáticos, facilita mucho esa tendencia; mientras que en la poesía, por su propia naturaleza, ese anhelo de objetividad, ese afán de pureza se presenta acompañado de dificultades y obstáculos, algunos aparentemente insalvables.

En efecto, ¿podrá la poesía, sin dejarse esclavizar por el significado de las palabras, sin convertirse en música, mantener el sello de algo inconfundible? ¿Podrá hacer de ese elemento esencial que la constituye, y repetimos la feliz expresión de Paul Valery, de esa misteriosa simbiosis de sentido y sonido, algo tan claro y puro como lo es un concepto matemático?

Esta tendencia hacia la objetividad, sobre todo si se la concibe en su máxima amplitud, ofrece, ante una visión superficial, un aspecto francamente desolador, hasta inhumano; pero al observar todas las dificultades que se presentan en la marcha hacia la objetividad, si se analizan sus causas, aparece el camino de la salvación.

Los filósofos partidarios de esa objetividad absoluta achacan todas aquellas dificultades al hombre y a sus limitaciones. Si, esta-

mos con ellos, los valores son objetivos y todas las limitaciones a esa objetividad residen en el hombre; pero esas limitaciones, ¡loado sea el mundo! constituyen precisamente su salvación. Esas limitaciones son la mejor prueba de que existe en el espíritu humano una extraordinaria facultad que logra vincular por lazos a veces misteriosos, esos mundos separados e inconexos; esas limitaciones son las que posibilitan al hombre sumergirse en el mundo supraindividual de los valores; esas limitaciones son las que le permiten ponerse en contacto con el espíritu objetivo: la ciencia, el arte, la religión, la moral; esas limitaciones son, en fin, las que le permiten al hombre vivir.

LA RADIACION DEL VIENTO EN CRISTO «REDENTOR» Y LA RADIACION SOLAR

Por EMILIO L. DIAZ

RESUMEN

This work is in order to investigate the relationship between the solar constant values and wind's velocity at Cristo Redentor (Argentine), 3832 m. up sea level.

The autor reach to determinate the variation of solar effect diference, with the deviation of midle preassure at V. Merecedes (S. Luis, Arg.) from anual midle; he find for any maximum of solar radiation a maximum of wind's velocity, being this last maximum nearer from the former if V. Mercedes midle preassure is greater than anual midle.

Apoyándonos sobre trabajos anteriores nuestros, en uno de los cuales publicado en estos mismos Anales, hicimos una estadística de la secuencia entre los máximos de radiación solar y los de velocidad de viento en altura en diversas estaciones europeas, norteamericanas y argentinas hemos calculado en éste, el coeficiente de correlación entre la radiación del sol y la velocidad del viento en Cristo Redentor, sin tener en cuenta la dirección del mismo. También se determinó la presión media en V. Mercedes (S. Luis) durante cada período de observaciones correlacionados.

Para la ejecución de este trabajo se utilizaron las observaciones de radiación solar hechas por la Smithsonian Institution en Montezuma (Chile), y los datos de viento en Cristo Redentor de 8 horas calculándose los coeficientes de correlación para la onda determinada por la fórmula:

$$\frac{\Sigma_1^5\, y}{5} \qquad \frac{\Sigma_1^9\, y}{9}$$

siendo

$$r = \frac{\Sigma u \,.\, v}{\sqrt{\Sigma v^2 \,.\, \Sigma u^2}}$$

A partir del 20 de Septiembre de 1934, fecha en que se comenzaron a publicar las observaciones diarias efectuadas en C. Redentor, y

hasta el 31 de Mayo de 1936, se seleccionaron los períodos de tiempo durante los cuales los valores de la radiación del sol venían dados con la suficiente continuidad como para calcular correlaciones, siendo estos períodos los que figuran en el cuadro I.

CUADRO I. — *Coeficiente de correlación*

Epoca correlacionada	Defasajes				nº val.	Presión media V. Merced.	Desvío de la normal aproxim.
	0 día	1 día	2 días	3 días			
Sept. 20 a Oct. 6/934 (1) . .	+ 0,29	— 0,04	— 0,31	—0,42	17	766,6	+ 5,6
Nov. 23 a Dic. 10/934 . . .	+ 0,16	+ 0,53	+ 0,52	+ 0,27	17	760,0	— 1,0
Jul. 1° a Jul 10/935	— 0,66	— 0,16	+ 0,29	+0,78	10	760,6	— 0,4
Ag. 13 a Ag. 31/935	+ 0,26	+ 0,51	+ 0,44	0,00	19	763,3	+ 2,3
Oct. 15 a Nov. 3/935 . . .	— 0,66	— 0,40	— 0,06	+ 0,53	19	761,0	0,0
Nov. 15 a Nov. 26/935 . . .	— 0,06	— 0,20	— 0,27	— 0,22	12	757,9	— 3,1
Marz. 5 a Marz. 27/936 . .	+ 0,21	+ 0,30	+ 0,41	+ 0,61	21	759,5	— 1,5
Abr. 25 a May. 26/936 . . .	+ 0,47	+ 0,52	+ 0,38	0,00	11	761,7	+ 0,7
May. 21 a May. 26/936 . .	0,00	— 0,52	— 0,52	+ 0.32	5	756 2	— 4,8
Promedios	0,00	+ 0,06	+ 0,10	+ 0,21			— 0,2

En el cuadro II se han hecho los promedios de los coeficientes de correlación para las veces en que el desvío de la presión media en V. Mercedes con respecto a la media anual (aproximada), era positivo; y para cuando ese desvío era negativo, con los resultados que se anotan:

CUADRO II. — *Coeficientes de correlación*

	Defasajes				desvio medio de presion
	0 día	1 día	2 días	3 días	
Para presión media mayor que la media anual	+ 0,34	+ 0,33	+ 0,17	— 0,14	+ 2,9
Para presión media menor que la media anual . . . . . (la de desvío 0 incluida)	— 0,17	— 0,08	+ 0,06	+ 0,38	— 1,8

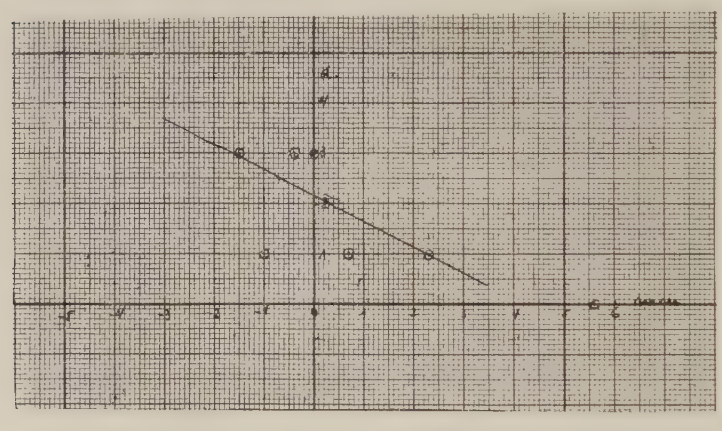
lo que parece demostrar que uno de los elementos que ocasionan las variaciones de defasaje que frecuentemente se observan entre la causa

(1) Se emplearon valores de radiación solar encontrados en Table Mountain EE. UU.

y el efecto es la situación isobárica media para el período que se considere, manifestándose más rápidamente la acción de las variaciones de calor solar en las zonas anticiclónicas, lo que concuerda con resultados hallados por otros observadores.

En el cuadro III, se han ploteado los defasajes que corresponden a los mayores coeficientes de correlación positivos, en función del desvío de la presión media en V. Mercedes y en el cual se ha trazado la recta compensada.

Cuadro III.



En realidad en vez de una recta debe tratarse de una curva asintótica con el eje de las x.

Los efectos meteorológicos que siguen al máximo de velocidad de viento en C. Redentor, serán analizados en otro trabajo. Aparentemente parece ser que ese máximo de viento va seguido, 3 ó 4 días más tarde por un máximo de presión en Buenos Aires, y que la mayor velocidad de circulación atmosférica sobre las estaciones aerológicas centrales de nuestro país ocurre 2 ó 3 días después del máximo de C. Redentor.

BIBLIOGRAFIA

E. Guillermic, *Le chauffage par les combustibles liquides.* 1 vol. de 394 págs. con 338 figuras y numerosos cuadros. 1935. Editor: Ch. Beranger. Precio: 110 francos.

En el prefacio de esta obra, se recuerda que no hace más de 25 años que la calefacción mediante el uso de los combustibles líquidos, fué iniciada en Francia; pero que en la actualidad, su empleo, así como la fabricación e instalación de los aparatos necesarios, ha tomado un enorme desarrollo, que justifica se dedique a su estudio una atención más preponderante cada día.

La obra de Guillermic tiende a tal objeto, pasando en revista los diversos detalles, según puede juzgarse por el título de los capítulos, que se transcribe a continuación:

Cap. I: Generalidades sobre los combustibles líquidos. Términos de comparación. Clasificación de los aceites pesados de petróleo. Generalidades sobre las instalaciones de calefacción por los aceites combustibles.

Cap. II: Almacenamiento y depósito. Reglamentos en vigencia. Almacenamiento en depósitos o a domicilio.

Cap. III: El equipo, propiamente dicho: Instalación de pequeños quemadores que utilizan productos ligeros, o de viscosidad media. Instalaciones de mayor importancia. Grandes instalaciones.

Cap. IV: Los quemadores de combustibles líquidos. Su clasificación.

Cap. V: Los quemadores a vaporización.

Cap. VI: Los quemadores a pulverización por el aire, a alta presión, a media y a baja presión.

Cap. VII: Los quemadores a pulverización mecánica.

Cap. VIII: Quemadores diversos; pulverización por presión de agua.

Cap. IX: Los órganos de regulación y seguridad. Controles de posición, de nivel, de llama, de presión, etc.

Cap. X: Los accesorios de la instalación del quemador. El recalentamiento del combustible. Filtros. Bombas. Ventiladores. Compresores, etc.

Cap. XI: Ejemplos diversos de equipos de calefacción con combustibles líquidos. Calderas de calefacción central. Aparatos productores de aire caliente. Hornos industriales.

Cap. XII: Disposiciones especiales de algunos quemadores automáticos de calefacción central.

El autor termina su obra con unas interesantes conclusiones en las que hace notar la forma tan imparcial como le ha sido posible, que ha puesto en práctica para describir los aparatos y los resultados de su funcionamiento, con lo cual se tiene una visión general de los problemas de calefacción

que pueden resolverse con los combustibles líquidos. Y como es de esperar para los años próximos un desarrollo cada vez mayor en el empleo de esta clase de combustibles, la utilidad de la obra que nos ocupa, es realmente indiscutible.

E. R.

James Dantzer y D. de Prat. *Les Tissus. Tissus clássiques. Tissus speciaux.* Dos volúmenes: el primero in 8° (21,5 × 18 cm.), de 145 páginas con 32 figuras en el texto; 20 francos. El segundo, de igual formato de 178 páginas con 93 figuras; 24 francos. Editor: Ch. Beranger, París y Lieja, 1935.

Se trata de dos obras preparadas especialmente para alumnos y diplomados en las Escuelas de Artes y Oficios francesas y belgas; en ellas se abordan problemas de técnica textil con lenguaje sencillo, sin grandes desarrollos ni consideraciones científicas que hagan necesario un previo estudio profundo para seguir útilmente la lectura. Pertenecen estos dos libros a una serie de publicaciones de índole parecida, en las que se ha tratado sucesivamente de las *Matières des industries textiles;* de los *Fils textiles;* y del *Tissage mécanique,* con el conjunto de las cuales viene así a formarse una pequeña enciclopedia elemental de la industria textil.

En el volumen dedicado a los *Tissus clássiques* se describen 260 tejidos distintos, dando la característica de cada uno de ellos, su armazón, aspecto, y diferenciación. También se los clasifica según la materia prima que entra en su composición, el modo particular de ser tejidos y la propia contextura que resulta. Cuando se trata de tejidos mixtos, en cuya preparación intervienen varias materias primas, se los clasifica según la predominante. Al final se incluye una lista alfabética de todas las denominaciones usuales en el comercio para distinguir los diversos tejidos.

En los cuatro capítulos en que está dividida esta obra, se tratan: Nociones generales sobre los tejidos; Las denominaciones comerciales de los tejidos; Las cualidades y el ensayo de los tejidos; Las condiciones generales de venta.

Como escasean mucho en las literaturas técnicas de los países latinos, libros que estudien con sencillez y claridad estos temas, desde el doble punto de vista técnico y comercial, este que nos ocupa será de inmediata utilidad, no sólo a las personas vinculadas a la industria textil, sino también a los empleados de grandes almacenes y hasta a los simples particulares que deseen o tengan necesidad de adquirir conocimientos concretos y prácticos sobre las diferentes telas que deben manejar, vender o comprar.

En el volumen segunido, dedicado a *Tissus speciaux*, se procura seguir el mismo plan que en el primero, aunque la mayor complejidad del tema ofrece mayores dificultades. En ocho pequeños capítulos, se dan informaciones útiles, acerca de diversos puntos, según puede juzgarse por los títulos de los mismos, que son:

Tejidos confeccionados, (manteles, pañuelos, servilletas, sábanas, etc.). Tules y encajes, (a mano y mecánicos). Guipures y filet. Broderíes y lanillas. Bonetería. Tapices y tapicerías. Cintas y pasamanerías. Tejidos en caoutchut, encerados, tafetanes, impermeables, linoleum, imitación de cueros, etc.

Como se ve, no por tratarse de reducido número de páginas, dejan de estudiarse los múltiples tipos de tejidos que se presentan en el comercio. Para cada uno de ellos se exponen los procedimientos de fabricación, las características del producto obtenido, las condiciones que más se buscan, las regiones donde con mayor intensidad se fabrican, y las designaciones comunes que es indispensable conocer cuando se quiere intervenir en alguna forma, en la venta, producción o compra de tejidos.

Los autores anuncian un tercer volumen en forma de « Album de muestras », que constituirá, sin duda, un utilísimo complemento de los dos volúmenes ya publicados. E. R.

ADOLPHE HULLEBROECK. *Defants du tissage.* Troisième partie. *Les métiers à boîtes multiples.* Un volumen de 144 páginas, con 83 figuras, editado por la Librería Politécnica de Ch. Beranger, París y Lieja, 1934.

El autor es un distinguido técnico de la industria textil, director de las Escuelas profesionales de Audenarde y de Renaix y la presente es la segunda edición de su obra, acogida con gran beneplácito entre los especialistas. Constituye un verdadero tratado práctico, que se dirige principalmente a los directores de fábricas, contramaestres y jefes de hilanderías, para los cuales han de ser de suma utilidad las indicaciones contenidas en el libro.

En el volumen presente, se estudian con particular detalle las « boites múltiples », necesarias para la fabricación de los tejidos que presentan varias maneras o matices en la trama o que están compuestos por varias materias primas diferentes. Se explican los principios generales en que se funda su uso, los varios sistemas, con sus respectivas ventajas e inconvenientes, la formación de los cartones necesarios, y por último los defectos que pueden producirse, junto con la manera de remediarlos y evitarlos en la medida de lo posible.

El concepto general con que está concebida la obra, es eminentemente práctico, y a eso se sujeta la redacción de las explicaciones y la esquematización de los dibujos, en los cuales se han suprimido todo detalle que no es esencial para la explicación concreta del mecanismo en estudio.

Por tratarse de un trabajo hecho con un dominio completo del tema, este libro resulta realmente tal como se lo propuso su autor: una guía segura y práctica, al alcance de todos, aun de aquellos desprovistos de conocimientos teóricos acerca de la tecnología textil. E. R.

CAMMERER, DR. ING. J. S. *Les procédés employés dans l'industrie contre la déperdition de la chaleur et du froid.* Un volumen en 8º (16 × 25 cm.), de 276 páginas con 91 figuras y 71 tablas numéricas en el texto. Precio encuadernado: 85 francos. Editado por la Librería Politécnica de Ch. Beranger, París y Lieja, 1934.

Se trata de una traducción francesa de la obra escrita en alemán por Cammerer, profesor de la Escuela Técnica Superior de Berlín y trasladada al francés por A. de Riva-Berni, ingeniero de Artes y oficios. El autor ha escrito especialmente un prefacio para la edición francesa, a la vez que ha revisado y puesto al día la obra, incorporándole todos los adelantos y

conocimientos nuevos alcanzados después de 1928, fecha de la edición alemana.

Basta considerar un momento el título de la obra, para deducir su importancia. La industria moderna emplea cada día con mayor amplitud los procedimientos de calefacción y refrigeración, y por lo tanto, es de sumo interés el aprovechar al máximo las cantidades de calor y frío producidos. Toda una extensa y variadísima serie de problemas se derivan de estas necesidades diarias, problemas que no tienen siempre solución inmediata ni fácil. La obra de Cammerer lo estudia con detalle y mediante las numerosas tablas numéricas que contiene, ofrece ya simplificados los cálculos requeridos para solucionarlos.

Las exposiciones teóricas están reducidas al mínimo, pero quien las desee podrá procurárselas mediante la copiosa bibliografía con que termina el volumen, donde el lector encontrará cuanta información desee. En cuanto a los datos experimentales, valores de constantes físicas, coeficientes de conductibilidad, rendimiento de instalaciones, etc., se han tenido muy en cuenta las Prescripciones de la Unión de Ingenieros alemanes, deducidas de una larga serie de ensayos sistemáticos hechos en Alemania desde 1918, así como también las conclusiones sobre estas mismas materias dadas a conocer por el « Bureau of Standard de Washington », a las que se agregaron otras de menor extensión pero de gran importancia, obtenidas en trabajos verificados en laboratorios ingleses, franceses y suecos.

Nada deja pues que desear este libro, como obra de consulta. A continuación transcribimos los grandes títulos de su índice, lo que contribuirá a que el lector confirme el juicio favorable que expresamos.

I. — Los procedimientos técnicos empleados contra las pérdidas de calor y de frío: bases fundamentales. Las leyes físicas. Las materias aisladoras y sus propiedades. Los valores numéricos de los factores más importantes en el estudio de la aplicación del calor. Medidas de la conductibilidad y de la temperatura.

II. — El cálculo y el empleo de los aparatos de calefacción y refrigeración en la industria. Las pérdidas de calor durante el período de marcha. Las cantidades de calor acumuladas cuando la marcha es continua. Las pérdidas de calor de una canalización que trabaja en forma intermitente. Cálculo de las instalaciones basado en consideraciones técnicas. Determinación de las dimensiones de una instalación aisladora, partiendo de consideraciones económicas. Cumplimiento de los encargos y valores que pueden garantirse.

Apéndice. Tablas de logaritmos neperianos. Coeficientes físicos importantes. Bibliografía. E. R.

HARRAENS, KARL. *Voutes de Foyers.* Un volumen de 16 × 25 cm., de 115 páginas con 73 figuras. Precio: 30 francos. Editado por la Librería Politécnica de Ch. Beranger, París y Lieja, 1934.

Esta obra ha sido escrita originalmente en alemán, y traducida al francés por el ingeniero de artes y oficios A. de Riva-Berni. Forma parte de un colección titulada « La técnica industrial, su estado actual », y constará de una serie de monografías relativas a diversos dominios industriales, publicadas por los miembros de la Oficina de Patentes de Alemania. Du-

rante los diez últimos años, las diferentes secciones de la oficina encargada del examen y otorgamientos de patentes de invención, han acumulado una riquísima colección de documentos relacionados al estado actual de la técnica industrial, en forma que, como es lógico, pocas o ninguna entidad privada es susceptible de tener a su disposición tan considerable cantidad de materiales sobre una misma cuestión técnica. Esto ha originado el plausible proyecto de que los jefes de las diferentes secciones de la Oficina de Patentes alemana, se encargaran de redactar monografías relativas a los diferentes temas sobre los que ellos deben informar, aprovechando los materiales contenidos en sus respectivos archivos.

Una de estas monografías, es la que aparece ahora en francés. Puede fácilmente comprenderse el extraordinario interés que reviste un libro elaborado en tales condiciones y cuan alto será el grado de su utilidad para los constructores, inventores y funcionarios encargados de examinar y dictaminar sobre proyectos de maquinarias o instalaciones análogas a las tratadas en esta monografía.

El problema de las « bóvedas de hogares », comprende fundamentalmente cuestiones de naturaleza térmica, pues en el espacio encerrado del cual ellas forman la parte superior, se producen variaciones de temperatura que van de algunos centenares a más de mil grados centígrados. El proyecto, construcción y mantenimiento de las bóvedas, debe tener en cuenta este hecho. Para salvar los inconvenientes que estas diferencias de calor originan en la estructura de la instalación, se han propuesto diferentes recursos y procedimientos, motivo de otras tantas patentes de invención.

La literatura técnica sobre este asunto, se ha limitado así a numerosas memorias aisladas; y la obra de Harraens, que estamos comentando, es, creemos, la primera que hace del asunto un estudio sistemático y de conjunto.

Expone primero las bóvedas « cintradas », y después los diferentes sistemas de bóvedas suspendidas, simples y dobles: la unión con las mamposterías verticales; la refrigeración y calefacción accidental o permanente; los dispositivos de defensa contra las temperaturas muy altas; la influencia de las aberturas; el reglaje de la posición; las bóvedas de reverberación; las metálicas; las desprovistas de juntas, etc.

Completan la obra una bibliografía de patentes no sólo alemanas, sino austriacas, suizas, francesas, inglesas y norteamericanas; de libros; de memorias, y de artículos de revistas.

E. R.

NOTICIARIO

Por E. R.

En su sesión del 22 de junio, la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, bajo la presidencia del ingeniero Sr. Agustín Mercau, fué considerado el informe relativo a la forma en que se lleva a efecto la instalación del Darwinion en su nuevo local de San Isidro, cuya tarea dirige el académico ingeniero Eduardo Latzina. Este instituto de botánica, donado por el naturalista Dr. Cristóbal M. Hicken, y que comprende el herbario de la flora argentina y de no pocas especies de los países limítrofes, además de muchos útiles de laboratorio y una valiosa biblioteca especializada, hallábase instalado en un antiguo edificio en Villa Progreso, partido de San Martín, y ha sido trasladado al local expresamente construído para dicho objeto en el barrio Parque de San Isidro Oportunamente se publicará el inventario de todas las existencias, que alcanza a más de 400 páginas, y se cuidará especialmente la dotación de los laboratorios para que puedan ser proseguidas con éxito las tareas de clasificación e investigación científica del material reunido y de las colecciones que se formen como resultado de las excursiones que el instituto deberá llevar a cabo, cumpliéndose así la finalidad esencial de ese centro de estudios botánicos. La Academia en pleno realizará en breve una vista a las nuevas instalaciones para convenir los detalles referentes a la inauguración oficial del instituto.

El plan de las principales actividades cumplidas por la Academia en estos últimos meses, comenzó con la disertación que el 18 de julio hizo el ingeniero Juan A. Briano sobre el tema « Canalización del río Paranacito; su comunicación con los ríos Gualeguay, Uruguay e Ibicuy », considerando un asunto de gran interés para toda la zona sur de la provincia de Entre Ríos, que está expuesta a frecuentes inundaciones como consecuencia de la crecida de los ríos del litoral argentino.

A principios de agosto se realizó un acto público para la entrega del premio Eduardo L. Holmberg, año 1932, al Dr. E. Kittl, quien expuso un resumen de sus observaciones sobre los minerales auríferos argentinos, seguido de una conferencia a cargo del Dr. Franco Pastore, sobre « La composición litológica de la sierra de San Luis », con exhibición de una colección de rocas y numerosos planos de carácter geológico y mineralógico.

En el mes de septiembre se efectuó la recepción de los nuevos académicos, ingenieros Enrique Butty y José F. Repossini y Dr. Teófilo Isnardi, y en el mes de octubre se llevará a cabo otra sesión pública en el salón de actos de la Facultad de Ciencias para la entrega del premio Eduardo L. Holmberg correspondiente a los años 1933 y 1934 a los Dres. José Imbelloni y Juan Bacigalupo, respectivamente.

LA NAUTICA Y EL PILOTAJE DURANTE EL SIGLO XVI

CONFERENCIA LEIDA EN LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA
EL DIA 10 DE JULIO DE 1936

POR

H. R. RATTO

Palabras de presentación
del Dr. ANTONIO CASACUBERTA.

Debo presentar a un marino destacado de nuestra flota de guerra y para ello, también es necesario, que hable de la marina de nuestra patria cuya evolución constante, debe ser significada en este acto.

Mejor que yo, quien luego hará uso de la palabra, podrá explicar técnica y armónicamente, todo el transcurso de nuestra vida marítima.

Y duele, pensar que son muy pocos los argentinos que en la hora actual, conocen los albores de nuestra armada. Saben que existió Guillermo Brown, quien unió su vida a nuestra gloria de libertad. Puede que algunos sepan que tuvimos un romántico Bouchard, paseando nuestra enseña por todos los mares del mundo.

Pero también se ignora, y en esto está la falta de nuestro agradecimiento, que existieron Espora, Rosales, Murature, Azopardo, Pinedo, Bathurst, King, Spiro, Jorge, Drummond, Grenville, Py y otros muchos, que en buques imposibles para las rutas del mar, supieron llevar, bien afirmada al mástil, la enseña de la naciente nacionalidad.

Nuestra armada tiene comienzos incipientes. Con buques inapropiados, nos lanzamos a la aventura de los mares. ¡Y vencemos! Flotas de poder superior caen bajo nuestros fuegos. Y sitios de epopeya coronan esa obra, en Juncal, en Los Pozos, en Quilmes, en la vuelta de Obligado y Carmen de Patagones!

El alma argentina, quiso tener su flota. Y allá en los momentos primicios de nuestra vida libre fué Larrea quien tuvo la sugeren-

cia... Pero pasaron los años y la armada argentina, rudimentaria, falta de valores, solo podría demostrar su empuje con el valor de sus tripulaciones.

¡Y pasaron los años! — repito. Hubo que dejar una pausa dolorosa en la vida de nuestra nacionalidad. Pasado el huracán rojo de la tiranía, la onda de paz tuvo colores de cielo.

La Argentina, con sus costas atlánticas, de una inmensidad grandiosa estaba al margen de cualquier agresión.

Y fué Domingo Faustino Sarmiento, ese vidente en todos los órdenes de la naciente vida argentina, quien formó nuestra primer escuadra verdadera. Por eso bien merecido tiene el homenaje de que nuestro barco escuela, infatigable surcador de todos los mares del mundo, lleve su nombre que solo puede remplazarle el crucero que se construye: « Argentina ».

Sarmiento, vidente, repito, plasmó nuestra primer escuadra, esa que se formó con las cañoneras « Paraná » y « Uruguay » y las bombarderas « Pilcamayo », « Bermejo » y « Constitución » y con esos dos acorazados monitores de río que se llamaron « Los Andes » y « El Plata », y que hoy radiados todos ellos son fierro antiguo cubierto de gloria. Junto a los malecones dormitan su esfuerzo bien ganado... Llegaron hasta el heroísmo y ahí está la « Uruguay », maltrecha, salvando a la expedición Nordenjökls, en pleno Polo Sud. Corazones argentinos efectuaron la hazaña; corazones que desafiando los « icebergs » rescataron, para la civilización, a los estudiosos polares y entre ellos a un argentino: Sobral.

Y luego la armada sigue su ruta de progreso. Vienen los buques modernos, prodigios de la ingeniería naval. Primero nos llega el « 25 de Mayo », luego los cruceros acorazados construídos en Italia y otros dos que no llegaron, para ser transferidos al Japón, durante la guerra rusa-japonesa en momentos que quien hoy es nuestro almirante Manuel Domecq García, estaba en el puente de mando en la batalla de Tushima junto al almirante Togo.

Luego la flota alcanzó en forma paulatina su mayor eficiencia; llegaron el « Buenos Aires » (galgo del mar), el « 9 de Julio », para que luego años más tarde se agregasen otros a esta flota actual, poderosa, moderna, llena de vitalidad y de preocupación para quienes deben conducirlas.

Por eso a la par de la modernización de la escuadra, sus marinos han debido estudiar y excederse en revelantes esfuerzos de energía. Había que bastarse, sin necesidad de tutores extranjeros. Había que estudiar — que estudiar a fondo — y nuestros marinos así lo hicieron fervorosamente. Y triunfaron.

Por eso es un orgullo para la Sociedad Científica Argentina amparar esta conferencia, el 5º de los actos recordatorios en el IV centenario de la primera fundación de Buenos Aires, que en su ciclo de hoy corresponde al capitán de fragata don Héctor R. Ratto, quien nos enorgullece con su vinculación, a la que también pertenecen esos heraldos del mar que se llaman Segundo A. Storni, Vicente E. Montes, Franklin Nelson Page, Teodoro Caillet Bois, Marcos A. Savón, Carlos M. Gada, etc.

Y este orgullo, del que acabo de hablar es el siguiente y es bien sencillo: la armada argentina cuenta en sus filas no sólo con hombres para la conducción de las naves y la disciplina de las tripulaciones, sino también con elementos intelectuales y, uno de ellos mi presentado, es quien os hablará. Tiene para ello conquistado un lugar distinguido. Y para que los oyentes no esperen, voy en forma escueta y rápida a definir su personalidad, esto es, al capitán de fragata Ratto.

Y trazo su biografía. Es el mejor honor que puedo hacerle. Nace en Luján en 1892, en la patria solar de Ameghino. Cursa el estudio naval 1907-12 y en la gloriosa fragata « Sarmiento » verifica tres viajes, en el que en 1930 fué jefe de estudios.

Luego la Hidrografía lo hace suyo. Y triunfa. Pasa al cuidado de entrega del explorador « Cervantes » y a la hora de las refacciones de nuestro buque escuela. Todo ello para santificar en esa escuela flotante el último beso argentino en donde se hicieron marinos los que hoy mandan seguros nuestras unidades de guerra.

Ratto, investigador como ninguno, no fué al extranjero en tren de placer. Y se dedicó a los estudios geográficos, históricos, literarios y profesionales. Abarcó toda su profesión para hacerla conocer al pueblo. Así « La Prensa » le abrió sus columnas para ello. Y desde allí pudo hablar a la nacionalidad con plena voz.

Su labor es intensa. Ratto ha publicado ya una decena de libros. ¡Ojalá sean más!.

Y ahora retirado del servicio activo, concentrado en sus estudios, podrá hablarnos como un verdadero técnico sobre aquellas materias que necesitan el juicio severo de un profesional.

Su obra múltiple y conocida así lo significa. Ratto, este lobo de mar, que se queda en tierra, para ilustrar a los novatos que deban hacer el saludo a Brown, y si ello llegara nuestros criollos del mar, que han sido numerosos, escucharán la palabra de este marino, que desde el retiro sigue estudiando y que les hablará de la náutica y el pilotaje en el siglo XVI.

Orgullo para mí es presentarlo en nombre de la Sociedad Científica Argentina y para ustedes, mis oyentes, la satisfacción de escucharlo.

Cedo la palabra al capitán de fragata Héctor R. Ratto...

* * *

Este año de 1936 puede en justicia llamarse el de España en Buenos Aires. Durante los 6 meses transcurridos, se han levantado numerosas tribunas en instituciones prestigiosas del país y puesto de relieve, con profundidad no igualada, el interés que despierta en los argentinos su pasado colonial; disciplina esta, que esparce un álito de fervoroso reconocimiento destinado a nimbar a quienes consumaron esa cumplida tarea de incorporar un continente a la civilización.

Solicitado por la Intendencia Municipal para cooperar en la presentación del modelo de la nave capitana del Adelantado; abocado, luego, a poner de relieve, en la Academia de Ciencias de Buenos Aires, la acción destacada de los intelectuales españoles vinculados al que fué virreinato de Buenos Aires, faltaba a mi espíritu, siempre grato a las cosas de España en América, esta nueva, honrosa y halagadora invitación de representar a la Sociedad Científica Argentina en el presente ciclo preparado por la Sociedad Geográfica GEA que, con tanta autoridad, ha trazado este programa conmemorativo.

Antes de entrar en materia he de pedir disculpas por la elección del tema, en consonancia con mi profesión, desde luego, pero todo lo árido que promete su título: « La náutica y el pilotaje en el siglo XVI », siglo que fué, sin duda, el más brillante de España — en nuestro continente y en el orbe — pues, además de los progresos registrados en las ciencias, las letras y las artes, resultó el del mayor dominio colonial que la historia del mundo reconoce y recuerda.

El tópico elegido prestaríase, por otra parte, a la reinvindicación de la clase marinera, comúnmente olvidada o pospuesta; de aquella clase que, por carecer de investigadores, ignora la embriaguez, muy legítima, de sus glorias pretéritas eclipsada, tal vez, por la conquista terrestre que dejara surcos más profundos en el espíritu de los pueblos de América y que, sin embargo, no se hubiera realizado sin el auxilio anterior de sus mareantes en el mar y de sus pilotos en la tierra.

No es de olvidar, en efecto, que la acción de los pilotos de Indias prosiguió a lo largo de toda la era colonizadora, trazando y relevando caminos; situando y plantificando ciudades; guiando la mentalidad, no siempre capacitada, de gobernantes o dirigentes... Todo ello está a la vista de quienes, a través del tiempo que la documentación trasunta, han encontrado — una y mil veces — el nombre de un piloto asesor en toda suerte de trances difíciles y por ende persona a quien rodeaba esa atmósfera de sapiencia, erudición o simple buen sentido que lo convirtieron en personaje conspicuo entre el conjunto heterogéneo de laborantes y menestrales; hombres de toga o espada; de justicia o de iglesia y cuyas funciones no desaparecen hasta el fin de la colonización española.

Hasta ninguno de ellos ha alcanzado, no obstante, la gratitud de la posteridad entre nosotros; la silueta de uno solo de los pilotos no ha llegado todavía a la piedra o bajo relieve de monumento alguno en el país. De la misma manera no aparecen los nombres de los primeros pilotos de Indias en la toponímia argentina en la cual no ha faltado lugar disponible para satisfacer la vanidad de un propietario, más o menos alfabeto, o el simple capricho de un político de influencia siempre más pujante y poderoso que la razón ponderada del hombre de pensamiento.

Disculpad, entonces, a quien tiene todavía más de hombre de mar que de las ciudades, este deseo tan íntimo de aproximaros al *mareante* genuino, fácil de reconocer, no sólo por el rojo papahigo y la muceta al uso, sino por el haber precioso de su intelectualidad de las que fueron símbolos: el astrolabio y la ballestilla tosca del siglo XVI que veremos ahora graduar; el contenido de sus mentados « regimientos de altura » tantas veces citados y nunca o poco estudiados y sus cartas náuticas dibujadas en pergamino en cuyas consideraciones forzosamente, he de molestarlos esta tarde.

PARTICIPACIÓN ESPAÑOLA EN LA NÁUTICA PRE-COLOMBINA [1]

Durante el siglo XI, antes de iniciarse la primer cruzada, el sevillano Al Zarcali, o Azarquiel, perfecciona el astrolabio y compone, a base de observaciones de un astrónomo de Marsella, tablas para cálculos celestes referidos al meridiano de Toledo.

Es también por esa época que, los cruzados, en sus peregrinaciones a Tierra Santa, llevaron a los respectivos pueblos cristianos de

[1] El autor utiliza en esta parte de su exposición lo tratado por el mismo en el Tomo II de la « Historia Argentina » dirigida por Levene según Ley del Congreso.

occidente la aguja imantada, la cual, como es sabido, mantiene aproximadamente la dirección del Norte de la tierra. Tal instrumento, era ya del dominio de catalanes y mallorquinos, quienes lo conocieron directamente de los árabes establecidos en España. Tal aplicación, dió a los navegantes de todos los pueblos el más preciado auxiliar y su uso generalizóse durante el siglo XIII.

En ese mismo siglo Alfonso X, el Sabio, funda la academia de astrónomos de Toledo llamada a preparar la compilación cosmográfica práctica más importante de toda su época. Es también por entonces que hace su aparición una nave en la cual el remo cede a la vela su mayor esfuerzo propulsor: la *carabela.* Se la conoce en las costas de España y Portugal, posee porte reducido; usa velas triangulares o latinas; es fina de líenas así como alta de popa y rasa de proa. Su origen parece ser moro; está destinada a bordear con los portugueses el Africa occidental y a inmortalizarse con Castilla en su viaje a América adonde llegaron con anterioridad, los *vikings.*

Pero, para que tal cosa ocurra, no basta poseer una nave adecuada ni contar con una compilación de conocimientos al alcance de algunos pilotos. Falta poseer tripulaciones capacitadas; interesar a los gobernantes por el conocimiento de otros pueblos, e inficcionar al propio por los grandes viajes, cosa que, en cierta forma, ocurrirá cuando la humanidad cristiana, que ha viajado con los cruzados, experimente la necesidad de un comercio más activo; sienta curiosidad por la existencia ya entrevista de tierras nuevas y también, claro está, cuando las ciencias náuticas mejoren sus métodos como consecuencia de su práctica y ejercicio en mares libres. Dicho con otras palabras: una vez que se difundan por el mundo pensante los relatos de los grandes viajeros y los periplos de los portugueses en el Africa sancionen la adopción de una verdadera ciencia al alcance de los *mareantes,* poseedores, ya, del arte de la vela y su maniobra. Es, indudablemente, dentro de ese complejo, que reside la fuerza animadora de las empresas marítimas llamadas a develar la existencia del medio planeta que faltaba asentar en los globos terráqueos de los geógrafos hasta fines del siglo XV.

Durante el siglo XIV, en que los portugueses contorneaban el litoral occidental del Africa, existía ya una ciencia cosmográfica, base de la náutica, que los árabes y musulmanes llevaron a España y Portugal. Parte de esos conocimientos debieron, lógicamente, irradiarse desde las muchas universidades existentes en la península en los comienzos del siglo XIII.

¿Cuándo empezaron dichos conocimientos a ser utilizados por los

navegantes de la península ibérica? No podíamos precisarlos a ciencia cierta; no obstante, es indudable de que tal cosa había ya ocurrido en el transcurso del siglo XIII en que se publicó la citada compilación de Alfonso el Sabio. En ella, aparece claramente asentado el principio básico, conocido por Ptolomeo once siglos antes, destinado a regir la navegación de altura de que: « la elevación del polo sobre el horizonte expresa el valor de la latitud del observador ». En el hemisferio norte cuéntase con una estrella visible — la « polar », nombrada desde muy antiguo « la estrella fenicia » — que puede considerarse, prácticamente, la proyección del eje de la esfera terrestre. Mediante determinación de la altura de la aludida estrella, quedaba expresada la latitud del observador.

Dicha determinación, en caso de tratarse de la estrella polar, sólo exigía el uso de un instrumento de medida angular tal cual se conocía desde el tiempo de Ptolomeo y modificado, para los hispanos, por Arquizabel. Para las observaciones meridianas de sol era menester conocer, además, el valor de su declinación o sea la magnitud del arco de círculo comprendido entre el ecuador y el astro. Si a la altura zenital del sol, obtenida directamente por el astrolabio, se le sumaba, algebraicamente, la mencionada declinación, obteníase la buscada latitud geográfica.

Dichos elementos — instrumentos, tablas de declinación y « regimientos » — ¿existían en España y Portugal y eran conocidos, los métodos apuntados, en el siglo XV? Incuestionablemente sí!

Con anterioridad a la navegación de los portugueses en el Africa, había tratados — cual la « Sphera Mundi » de Sacrobosco — que evidenciaban la forma y magnitud del mundo así como el sistema universal que lo rige; se contaba — entre otros — con el intitulado libro « Rudimentos astronómicos » de Alfergano divulgado en reediciones durante los siglos XIV y XV; circulaban no pocos « Regimientos » o reglas prácticas para la construcción y uso de astrolabios; textos o manuales de Navegación al alcance de los buenos pilotos; tablas, cual las de Abraham Zacuto profesor de Astronomía de Salamanca, que tenían catalogados los valores de la declinación del sol y, por cierto, varios «compendios» relativos a la aguja de marear.

Comprobados esos aportes de importancia para el progreso de las ciencias náuticas en la península ibérica, ¿será necesario establecer cuáles de esos conocimientos fueron originados en España y cuáles en Portugal? No lo creemos. Más aún, consideramos difícil — ya que no imposible — establecer la prioridad de buena parte de tales

aportes por la simple razón de que, en esta materia, la verdadera originalidad se remonta a siglos y su desarrollo obedece, en definitiva, a etapas de un perfeccionamiento que florece, sí, contemporáneamente en España y Portugal, pero tiene sus raíces en la antigüedad.

Puede en cambio aceptarse que, ambos países, forman una unidad cultural en lo que a la náutica y el pilotaje concierne y que, esas disciplinas, habían cristalizado por entonces en conceptos al alcance de pilotos. Para lograr tal madurez contribuyeron, según hemos dicho: los conocimientos astronómicos de los árabes que dominaron la península durante seis siglos y de los musulmanes traídos de Oriente cuando las cruzadas. Debió también constituir factor ponderable de progreso: la situación geográfica de esos dos pueblos, lugar, a un mismo tiempo, vecino al Africa y punto de reunión de los navegantes nórdicos, con los del Atlántico y Mediterráneo.

En el año 1415, Portugal sacude el yugo musulmán y se halla en condiciones de iniciar sus navegaciones al Africa. Ceuta está en manos de los lusitanos y la gobierna el príncipe Enrique nombrado, más tarde, el navegante.

Los portugueses diezmados por las guerras, buscan obtener esclavos para el cultivo de sus tierras al par que extender al Africa su comercio. Espiritualmente, los anima el deseo de realizar la conquista de Jerusalén en que acaba de fracasar San Luis.. Para lograr tal intento piensan sentar pie en el río Senegal, que erróneamente suponen ser nacimiento del Nilo; desde ahí, remontando sus aguas, cruzar al reino cristiano de Abisinia donde creen hallar al Preste Juan y luego, mediante ayuda de tan poderoso aliado, intentar la conquista del Santo Sepulcro.

En orden cultural, preceden a las expediciones portuguesas a realizarse ahora, la instalación de la academia de pilotos fundada en Sagres, por don Enrique, dirigida por un español ilustre: el maestro Jaime de Mallorca y secundado por el alemán Martín de Bohemia que, por entonces, calculó también una tabla de declinación solar y recibió la misión de enseñar a los navegantes portugueses métodos de navegación de altura. A juzgar por transcripciones de la bibliografía marítima de entonces, es evidente: el conocimiento aproximado de la magnitud del grado terrestre y el número de leguas en él comprendidas; la representación cartográfica de los lugares conocidos; la manera correcta *de echar el punto* en la carta; regímenes de las mareas y de los vientos, etc.

A partir del hallazgo del cabo de las Tormentas, por Díaz en

1484, la derrota al Asia fabulosa, que implicará el hallazgo del continente americano, no podía estar lejano. El adelanto geográfico y náutico de la península ibérica, puesto de manifiesto en las anotadas navegaciones, lo indica.

Lógicamente hablando, el descubrimiento no puede dejar de producirse a poco que los entendidos quieran, por otra derrota, llegar a las tierras del gran Khan. Esta empresa, en sí, podrán ser más atrevida; empero, apreciada sobre una esfera, era comprensible, lógica, y, por cierto, realizable en menos tiempo que el empleado por Marco Polo y otros viajeros en razón de su menor distancia.

Es importante recordar que, paralelamente al progreso de la náutica, operábase el de la construcción naval y con ella la dignificación de las tripulaciones que a tan bajo nivel moral llegara con el *forzado.* La aparición de la *nave,* al exigir a sus dotaciones la vida siempre más libre y profesional de las arboladuras, creóles un conjunto de conocimientos y aptitudes que les dieron jerarquía, contribuyendo a la formación del *mareante,* personaje distintivo de una clase modesta, pero no exenta de méritos, acreedora de ciertos privilegios que indudablemente regían en España a fines del siglo XV y, desde luego, con una comprensión cabal del problema náutico. La participación que ellos tomaron en las empresas descubridoras de fines de esa centuria, evidencia una elevada capacitación técnica que no se improvisa y que existía al iniciar Colón su viaje al oeste.

¿Fué el de Colón un descubrimiento? En el sentido estricto de la palabra? ¡No!, pues, está probado la llegada a América de otros navegantes.

Más aún, podríamos decir que, además de los vikings, casi no hubo nación digna de ese calificativo, que no vea en alguno de sus hijos algún presunto o auténtico precursor de Colón.

Los ingleses, saben de antiguos piratas que en el siglo XIII llegaron en sus correrías a nuestro continente; los galenses, recuerdan la partida de Madoc, hijo del Rey Orien Groyned, soberano de Gales del Norte, quien en 1370 partió para tierras antes conocidas de islandeses y groenlandeses; los vascos, citan con orgullo el conocimiento que de los bancos de Terranova tenía, antes del viaje de las carabelas, su paisano, Juan de Echaide; los venecianos, atribuyen a sus compatriotas Nicolás y Antonio Zeno la llegada a la isla Feroé, Groenlandia y costas de América del Norte en 1430 y muestran aún, la carta confeccionado por Andrea Bianco en 1436 en la que parece evidente la identificación de Terranova con la isla que en aquélla se llamaba Stocafixa mientras, los portugueses, ase-

guran que Juan Vaz Cortereal tocó, por 1464, la costa del Canadá que designó del Labrador y la misma de Terranova que nombró Terra dos Bacalhaos.

Empero, náuticamente, la empresa cumplida en la memorable noche del 11 al 12 de octubre de 1492, valía tanto como los viajes descubridores de los vikings y más que la de los pseudos descubridores a que acabamos de referirnos porque ella, entre otras cosas, se realizaba con el auxilio de una ciencia ya madura y el apoyo de una nación capaz de comprender y aprovechar sus frutos.

Africa, barajada en su parte occidental por los geniales mareantes de Portugal, define la prosecución de una política que implica, al fin de cuentas, el avance progresivo de una exploración costera cuyo primer tramo tenían sus navegantes prácticamente ante la vista. Tales actividades no cambiaron, por otro lado, la fisonomía del continente africano. En tanto, la hazaña colombina, siginificó para la América indiana la alteración total de sus destinos.

LA NÁUTICA ENSEÑADA EN LA CASA DE CONTRATACIÓN DE SEVILLA

Acabamos de recordar la existencia de conocimientos náuticos reales al producirse el descubrimiento. Asistiremos, ahora, a la difusión de tales conocimietos mejorados por las nuevas necesidades de la navegación a las Indias y estimulados por esa sed de ciencia, gloria y aventura que, con su misticismo religioso, son las características acentuadas del español culto del siglo XVI.

Para conocer el espíritu emprendedor del mareante es menester penetrar en la historia de los viajes marítimos y sus vicisitudes de leyenda; para aceptar su contenido científico, es imprescindible penetrar a la Casa de Contratación de Sevilla. En ella, desde los primeros años del citado siglo, se daba enseñanza teórica a los pilotos de Indias; se rendía el examen que habilitaba a los *mareantes* de las naves graduarse pilotos y se impartían normas que implicaban el control sobre el instrumental y cartas marítimas usadas a bordo de las naves que venían a América. Tan importante misión recayó, fundamentalmente, en los Pilotos Mayores, título que en los primeros tiempos desempeñaron personas que habían revelado especiales aptitudes para el estudio de la náutica y el pilotaje luego de haber realizado viajes de importancia. Los nombres de Américo Vespucio, Sebastián Gaboto y Juan Díaz de Solís, que desempeñaron sucesivamente el cargo desde 1508 hasta mediados del siglo, nos liberan de abundar sobre ese punto.

A partir de esta última época, — mediados del siglo XVI — el cargo se llenaba por « oposición » llamándose a los candidatos a ocuparlos, mediante pregón en las universidades de Salamanca, Valladolid y Alcalá y en los puertos de las provincias andaluzas. Un tribunal compuesto por cosmógrafos y hombres entendidos en navegación, elevaba al Consejo de Indias una terna para ser propuesta al Rey.

Durante muchos años — y a partir de 1508 — funcionó la cátedra de Cosmografía a cargo del Piloto Mayor encargado de dictar a los alumnos conocimientos teóricos. Corriendo el tiempo, el Piloto Mayor era Presidente del Tribunal para graduar pilotos solamente. Cuando tal cosa ocurrió designose un catedrático para dictar la ciencia cosmográfica, y se nombró un Cosmógrafo con la misión de confeccionar cartas e instrumentos náuticos. Veamos, casi al azar, algunas de las obligaciones de maestros y alumnos.

Los candidatos a pilotos, que asistían a las clases teóricas, debían tener menos de 24 años; ser marineros que ya habían navegado por las Indias por lo menos durante 6 años y pagar una mensualidad a quien les enseñaba. Daban clase en la capilla de la Casa de Contratación y, durante un tiempo, siguieron estudios con programas desarrollados en tres cursos.

Las materias matemáticas se estudiaban, lógicamente, de manera progresiva. Empezaban en el primer curso: por las operaciones elementales de la aritmética, regla de tres, raíz cuadrada y cúbica y operaciones de quebrados; seguían, arcos y cuerdas; senos, tangentes y secantes y algunos puntos de la trigonometría esférica. En el tercero y último curso se iba al dominio teórico y práctico de las materias profesionales, vale decir, estudio del Almagesto de Ptolomeo; de la Cosmografía y navegación; del uso del astrolabio y su fábrica; de la manera de utilizar las observaciones del sol, luna y planetas; del manejo del *radio-globo* y del uso de los *relojes* (amp. y esfera celeste).

Posteriormente, los cursos se fueron acortando y los conocimientos debieron en gran parte adquirirse fuera de la Casa a la cual siempre correspondía extender títulos a los pilotos mediante examen.

Para examinarse debían los candidatos haber nacido en Castilla o León o, por lo menos, « tener carta de naturaleza »; contar más de 25 años; ser de buenas costumbres; no tomar vino; no decir mal de Dios y tratar bien a los marineros ».

El tribunal, llamado a pronunciarse sobre la capacidad técnica de los pilotos, se constituía con nueve miembros: el Piloto Mayor, dos

Cosmógrafos de la Casa de Contratación y seis pilotos. Presidía, sentado en una silla de gran tamaño, el ya citado Piloto Mayor quien tenía a su derecha al Cosmógrafo más antiguo y a su izquierda al otro sentándose, por riguroso orden de precedencia, sucesivamente a derecha e izquierda, los pilotes examinadores.

Estos últimos, dice Herrera en sus « Décadas », juraban, previamente, hacer a los examinadores, « las mejores y más difíciles preguntas que supiesen », sustentándolas según su honrado saber y prometiendo así mismo dar libremente su voto « sin respeto de odio, ni amistad ni otra pasión alguna ». Los que se presentaban a examen debían haber navegado — dijimos — por lo menos seis años por el mar y presentar también al examen el instrumental y cartas que usaban en sus navegaciones.

El Piloto Mayor y los Cosmógrafos, tenían derecho a hacer cuantas preguntas desearen; los pilotos examinadores, en cambio, solo podían hacer tres cada uno. Efectuado el examen, el Piloto Mayor recojía, con intervención de Escribano, pago por los pilotos, los votos de los miembros del Tribunal. Aquellos que se inclinaban por la aprobación hechaban habas en la toca de un mareante. Quienes tenían más habas que altramuces podían obtener su título; los votados con más altramuces que habas, debían embarcar nuevamente como marineros y navegar por mares de Indias un espacio de tiempo no menor de un año. Durante una época, esta manera de votar, se alteró un tanto pues concedióse al Piloto Mayor aprobar o desaprobar, siempre que contara con una tercera parte de habas o altramuces.

Es de hacer notar que el califivativo de *mareantes* correspondía a todos aquellos que profesaban en el arte de navegar. Para ello era menester iniciarse como *paje* a bordo desde temprana edad y prestar los servicios rudimentarios del oficio como ser el manejo y guardia de las ampolletas y faroles, el cuidado y limpieza del instrumental. Dependían del capitán y del piloto en lo concerniente a la navegación; del *maestre* en cuanto al régimen interno de la nave y del *Contramaestre* en cuanto a las maniobras de mar y fuerza.

LA NÁUTICA Y EL INSTRUMENTAL

Un documento explícito y fehaciente — la Real Cédula del 19 de enero de 1533 — nos dice cuales eran en particular los conocimientos exijidos a los pilotos en el examen y cuales los instrumentos que éstos debían usar en sus navegaciones, y presentar a la Casa.

« Primeramente — dice la R. C. citada — a de leer la esfera a lo

menos los dos libros de ella; a de leer asimismo el regimiento que trata de la altura del sol y cómo se sabrá y la altura del polo (latitud) y cómo se sabrá y todo lo demás que parecerá por el dicho regimiento; a de leer el uso de la carta y cómo se tiene de echar punto en ella y saber siempre el verdadero lugar en que está; a de leer también el uso de los instrumentos y la fábrica de ellos porque conozca, en viendo, un instrumento si tiene error ».

Los instrumentos no eran otros que: la aguja de marear, el astrolabio, el cuadrante de declinaciones y la balestilla. A las reglas que se aplicaban para obtener los elementos de situaciones buscados se les llamaba regimientos.

Existieron además algunos derivados a saber: la armilla náutica, el cuadrante pendular y el radio astronómico descriptos por Simón de Oliveira y ya, a fines del siglo XVI esta importante aplicación del astrolabio: los círculos de 90º paralelos al limbo del cuadrante que Pedro Nunes, portugués, le introdujo en número de 45 cada una de las cuales se dividían en 89, 88, 87, 44 y 46 divisiones con el fin de hacer alturas de arcos con la aproximación que Pedro Vernier difundió en su libro en 1631.

Prosiguiendo con el detalle de las materias a enseñar dice la Real Cédula: « que a de leerse en clase como se marcan las agujas para saber cuanto nordestean o noroestean; conocer el uso de un reloj general diurno y nocturno; saber de memoria y por escrito los días de luna de todo el año para determinar la hora de la marea ».

Tal programa, por así decirlo, nos pone en camino de encarar los conocimientos reales exigidos a los pilotos, asunto éste que vamos a examinar punto por punto luego de haberlo desentrañado en una buena cantidad de libros que han tratado parcialmente el tema y que nosotros expresaremos en su totalidad. Para ello agruparemos en tres partes la resolución del problema, vale decir: problema de orientación; de determinación del punto y del uso y construcción de instrumentos. .

(A continuación el conferencista proyectó varios instrumentos cuyo uso y construcción explicó detalladamente. En las páginas que siguen, se reproducen algunos).

EL PILOTO A BORDO

Acabamos de ver cómo se formaban los pilotos; cuál era, en la época que consideramos sus conocimientos, el instrumental usado en la navegación y hasta penetrado en los detalles de su construcción. En una palabra, conocemos poco más o menos, su bagaje científico; veamos ahora, su situación a bordo.

Ante todo, bueno será admitir que las constancias por nosotros conocidas establecen de manera fehaciente que los pilotos de Indias pertenecieron, en su inmensa mayoría, a las siguientes poblaciones

FIG. 1. — Astrolabio.

de la baja Andalucía: Ayamonte, Cádiz, San Lucar, Pto. Santa María y Sevilla o sea aquellos lugares donde se extendía por igual la influencia natural de la Casa de Contratación y el ambiente de los hombres de mar acostumbrados, desde agosto de 1492, a ver zarpar buques a Indias y mantenedores de esa gran conmoción que se llamó el descubrimiento de las Indias occidentales.

Provenían todos ellos de la clase pobre, pues así lo afirman, sin excepción, una buena cantidad de documentos que se ligan con el tema publicado por José Pulio Rubio en su trabajo: « El Piloto Ma-

yor de la Casa de Contratación de Sevilla ». Recorriendo en distintas fuentes bibliográficas la vida y origen de muchos pilotos, no hemos encontrado, jamás, la mención de que fueran de la nobleza o de esos hijodalgos o secundones de provincia que, en otras naciones, sirvieron en la marina y que hallaremos en las flotas de galeones al servicio del Estado, como capitanes en ese siglo.

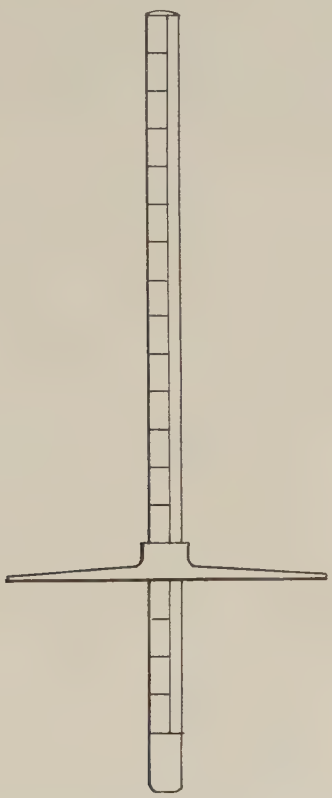


Fig. 2. — Ballestilla

Clase pobre, en cuanto a sus recursos, pero rica en ilusiones y dotada de ese alto espíritu de empresa, característico de una época y de una raza, constituyó, a bordo, un personaje central en quien recayeron los éxitos o fracasos del viaje o expediciones.

Zalazar el Oidor de la Española en su celebérrima carta de 1573 escrita, como es sabido, en aquella « Nuestra Señora de los Remedios, de harto mejor nombre que obras » nos habla en tono festivo del Piloto. El lo califica « teniente del viento »; lo ve, « con grande autoridad, sentado en su tribunal e cadira de palo; y de allí — di-

ce — hecho un Neptuno, pretende mandar al mar y a sus ondas y a las veces sacude el mar con una rabeada que si no se asiese bien de los arzones de la silla, iría a sorber tragos del agua salada. De allí — agrega — gobierna y manda y todos hacen su mandato y le sirven tan bien que después de Lanzarote cuando de Bretaña vino, yo no he visto caballero tan bien servido ni he visto bellacos que tan bien sirven y merezcan sus soldadas como estos marineros. Porque si el piloto dice: « ah de proa » veréislos al momento venir ante él saltando como demonios conjurados; y están los ojos en él puestos y las bocas abiertas esperando su mandado y el con gran autoridad manda al que gobierna ».

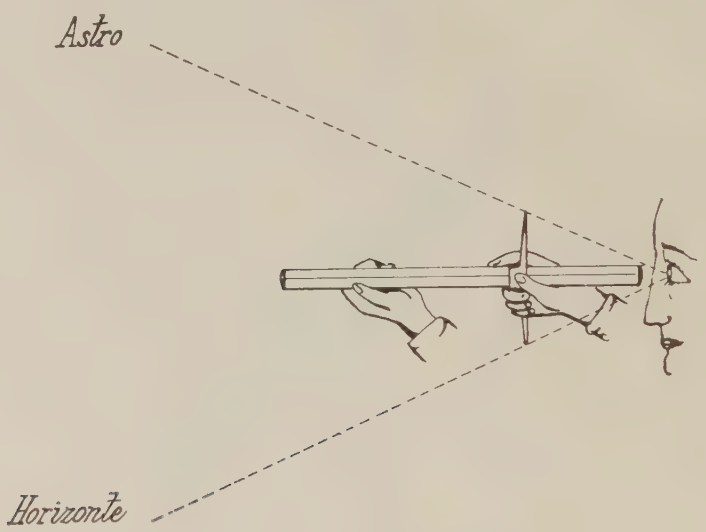


Fig. 3. — Uso de la ballestilla

« Y cuando el piloto provee estas cosas, es de ver la diligencia y presteza de los marineros en la ejecución de ellas, porque en el instante veréis unos en los basos de la gavia; otros, subiendo por los flechastes asiéndose a los obenques; otros caballeros en las antenas; otros abrazados al calcés; otros, con los mateleros; otros pegados con la carlinga o asidos a los tamboretes; otros asidos de las escotas halando y cazando y otros trepando y encajándose de una a otra parte por las otras jarcias; unos altos y otros bajos, que parecen gatos pauses por los árboles, o espíritus de los que cayeron del cielo y se quedaron en el aire ».

Eso en cuanto a la maniobra. Referente a los cálculos y princi-

palmente a los de recalada nos dirá, bien que en su estilo hilarante y desde luego exagerado:

« Así navegamos con viento galeno hasta que ya el piloto y gente marina comenzó a oler y barruntar la tierra como los asnos el verde. A estos tiempos es de ver al piloto tomar la estrella, verle tomar la

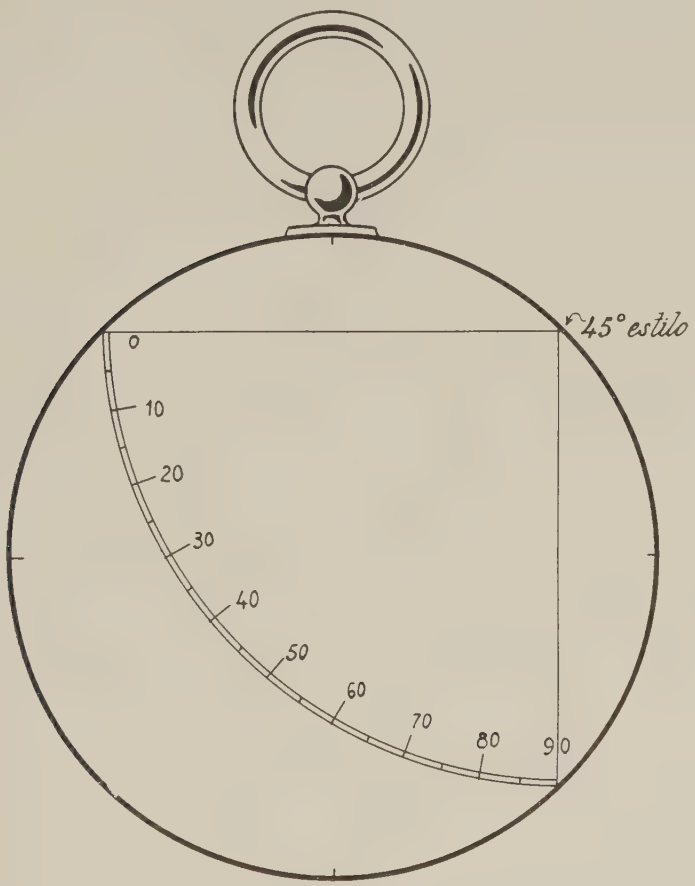


FIG. 4. — Astrolabio modificado.

balestilla, poner la sonaja y asestar al Norte y al cabo dar 3.000 ó 4.000 leguas de él; verle después tomar al medio día el astrolabio en la mano, alzar al sol los ojos, procurar que entre por las puertas de su astrolabio y cómo no puede acabar con él, y verle mirar luego su regimiento; y en fin echar su bajo juicio a montón sobre la altura del sol y como a las veces le sube tanto que le sube mil grados sobre él. Y otras veces cae tanto rastrero que no llega allá con mil años

y sobre todo me fatigaba ver aquel secreto que quieren tener con los pasajeros, del grado o del punto que toman y de las leguas que le parece que el navío ha singlado; aunque después que entendí la causa, que es porque nunca dan el blanco ni lo entienden, tuve paciencia viendo que tienen razón de no manifestar los aviesos de su desatinada puntería; porque toman la altura un poco más o menos

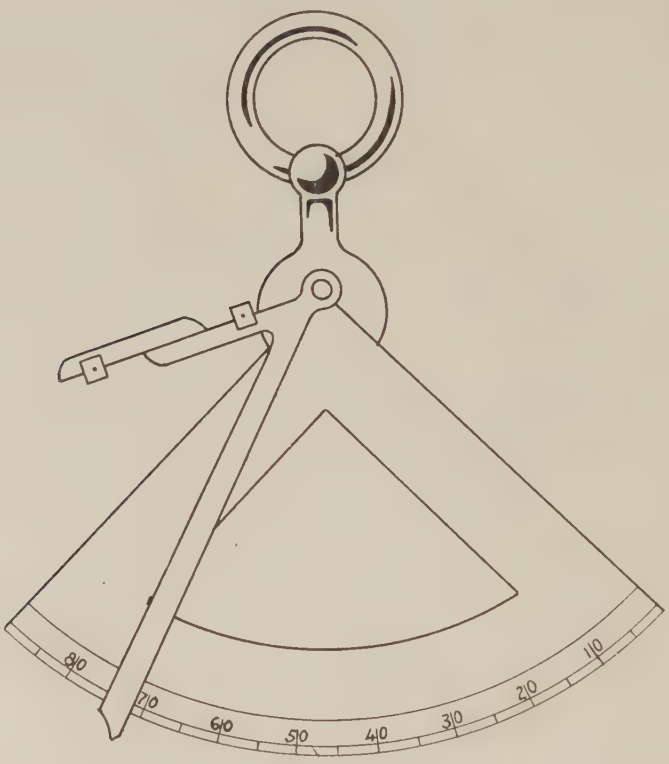


Fig. 5. — Cuadrante pendular.

y espacio de una cabeza de alfiler en su instrumento os hará dar 500 leguas de yerro en el juicio. Tómase este tino: Oh, como muestra Dios su omnipotencia en haber puesto esta sutil y tan importante arte del marear en juicios tan botos y manos tan groseras como en la de esos pilotos! Que es verlos preguntar unos a otros: «¿Cuántos grados ha tomado vuesa merced? Uno dice: «diez y seis»; otro «veinte escasos»; y otro: «Trece y medio». Luego preguntan: ¿Cómo se halla vuestra merced con la tierra? Uno dice: yo me hallo 40 leguas de tierra; otro, yo 150; otro «yo me hallé

esta mañana 92 leguas; y sean tres o sean trescientos, ninguno ha de conformar con el otro ni con la verdad ».

« Oyendo estos vanos y varios juicios de los pilotos y maestre y algunos marineros que presumen de bachilleres en el arte, venimos, hasta que, a los 26 días de nuestra navegación, fué Dios servido que vimos tierra ». Terminando así su retrato exagerado del piloto: « Con el gozo de verse con la tierra que demandábamos, se descuidó un poco el señor piloto teniente del viento y su delegado, el que traía la rienda del dicho caballo de madera, comenzó a decaer

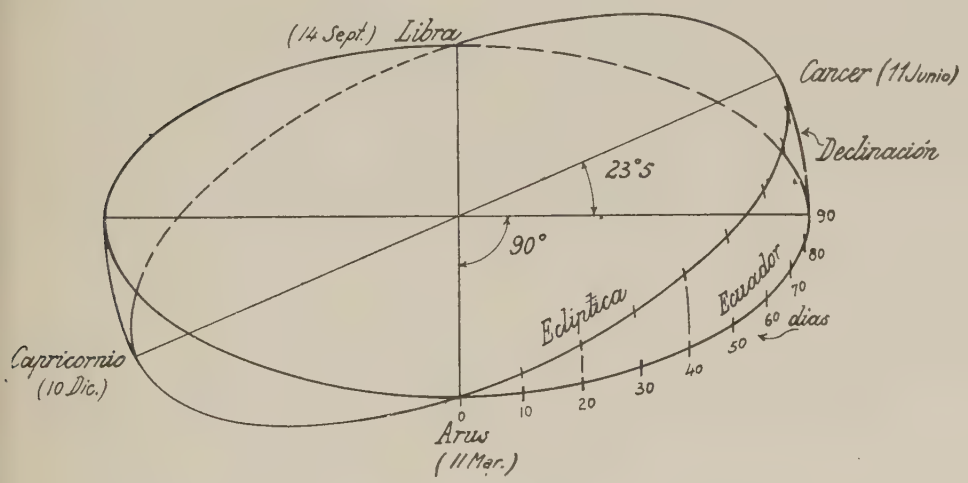


FIG. 6. — Valores de la declinación del sol que obraban gráficamente en el cuadrante de declinación.

el navío del puerto hasta que dando bordos se volvió a poner en la carrera. Lo cual fué causa que no podíamos entrar aquel día por la boca del río por ser ya de noche ». Y así convino entrar con la sonda en la mano a ponernos en lugar seguro; porque fuera necedad haber nadado y nadado y ahogar a la orilla ».

Dije antes que, si en los Anales de la Casa de Contratación de Indias estaba estereotipada — valga la expresión — la ciencia del pilotaje y la náutica, era en las constancias documentales de sus viajes donde debía desentrañarse la psicología de los navegantes de este siglo XVI. Pues bien, a fin de penetrar de alguna manera a ese importante tópico, debía relataros las andanzas de dos pilotos íntimamente ligado a nuestra costa: Simón de Alcazaba y Pedro de Sarmiento. Pertenece el primero, a la época en que Mendoza sentaba un pie temulento en lo que es hoy ciudad capital de la República; el otro, próximo al segundo asiento — el de Garay.

Mendoza, decía, actúa en el Río de la Plata en 1536; Alcazaba lo hace en 1535. Aquél, tiene por escenario de sus futuras glorias la margen derecha del Río de la Plata; el segundo, la costa más inhospitalaria del territorio del Chubut en la zona comprendida

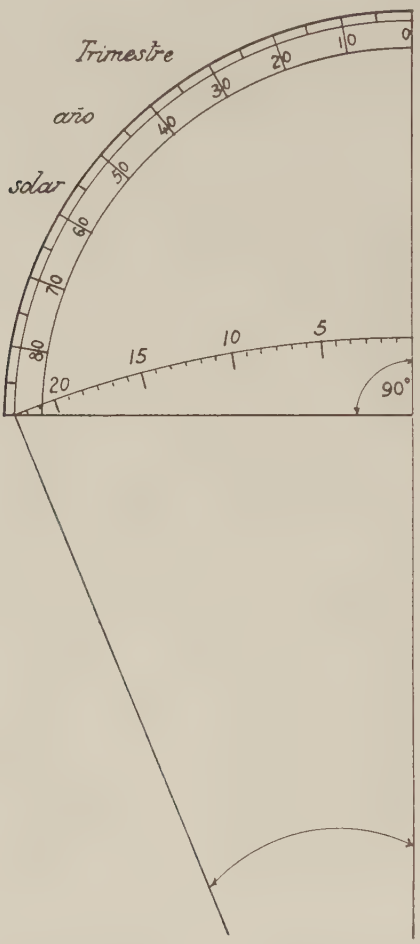


FIG. 7. — Manera gráfica de construir un cuadrante de declinación solar.

entre el Oven, parte norte del golfo de San Jorge y el paralelo 44°. Al primero, no hemos cesado de recordarlo en todo lo que va del año; al piloto Alcazaba, nadie lo nombró al cumplirse el cuarto centenario de su llegada al Chubut.

Mendoza era sanguinario, orgulloso, altivo. Alcazaba era, por el contrario, bueno, confiado, tal vez irresoluto. El Adelantado, aun-

que postrado, empuñó siempre el gobierno de la expedición que se confiara; el otro murió por no luchar y colgar en la horca a los que conspiraban.

Era nuestro Simón de Alcazaba, un piloto portugués, dotado de buenas condiciones intelectuales; tales que, el mismo Emperador, no titubió en encomendarle la defensa de extensos territorios en el pleito famoso con Portugal a raíz de la posesión del Maluco.

¿Qué trajo a Alcazaba a nuestra costa? La desobediencia. En efecto, luego de haberse comprometido a colonizar, o poblar, en una gobernación que debió constituirse al Norte del estrecho de Magallanes — en el Pacífico — lo hizo en esta parte del Atlántico.

Su expedición puede llamarse: la de los díscolos; de los motineros o si se quiere «*la del mal vino*». Desgraciada fué la partida y miserable el regreso — si es que tal nombre merece darse a la vuelta a una isla de las Antillas de solo alguno de sus sobrevientes luego de haber paseado, los primeros, en una incursión por tierras patagónicas, sus pasiones tumultuosas, cual si la tierra reseca que pisaban les agriara el vino que en grandes cantidades embarcaron al salir a viaje y que parecía despertarles sed insaciable de sangre fraticida.

Dos naves mandaba en jefe el portugués Simón de Alcazaba. Una era la «San Pedro»; la otra la «Madre de Dios». Aquélla resultó mala porque tenía baja la borda, pequeña la popa y había dejado al abandonar el Guadalquivir un trozo de su quilla; pero, la segunda de las naves, fuera tal vez peor, pues quienes la tripulaban eran gente díscola y como entonces dijeran «non temerosa de Dios».

Alcazaba era viejo, corpulento y bondadoso en extremo. Empero, en eso de dar la ley a los hombres y llevarlos al sacrificio, más ha valido siempre ser justo, sereno y bien dotado de carácter...

Las naves, repito, habían embarcado mucho vino y poca agua al punto que, dicen crónicas, daban aquél a las bestias.

En el estrecho empezaron disputas y desazones. Alcazaba, que había prometido al Emperador cruzar ese paso para asentarse con su gente en la Mar del Sud, no supo imponerse cuando los suyos se negaron, como lo hizo Magallanes — el grande — o como Carabajal y Elcano en el viaje que siguió al primero. Vieron en la costa el casco desecho de la «Santi Espíritu» y se creyeron impulsados al mismo destino. Fué entonces que nacieron las protestas de todos, sobre todo: lo duro de las faenas, la rudeza del clima, la fuerza y asiduidad de los vientos y lo malo de las naves mismas.

En tanto no dejaban de tomar vino para compensación de sus desventuras.

Alcazaba, bondadoso, sólo hablada a sus subordinados para hacerles promesas. No se asentarían en la mar del Sud, sino en el Atlántico, y desde un puerto de ese mar, encaminarían sus pasos a tierras donde abundaba el oro y la plata. En medio de esos hombres quebradizos, resultaba el jefe que nunca reprende ni se impone, sino que otorga o que promete. De ahí que al oir vociferar a los suyos desobedeciera a su soberano. A continuación, creyendo dar una muestra de fortaleza; pensando, tal vez, que revistiéndose de un título más pomposo lograría elevarse y atraerse el respeto de sus subordinados, se hizo jurar Gobernador y emprendió su expedición por tierras de su mal ubicada gobernación de León.

Sus maestres y pilotos se convirtieron en capitanes de tropa; los restantes mareantes y sobresalientes, en cabos de escuadra. Pero, de esa guisa, a nadie engañaba porque debajo de su capacete existía el blando de Simón de Alcazaba que prometía lo que no podía cumplir. La gente era también siempre la misma, por dentro y por fuera.

Desembarcó Alcazaba con los suyos, en el puerto ya nombrado del Oven, en cuya playa formó su tropa en compañías. Adelante: aquel piloto Alonzo Rodríguez con su gran astrolabio, aguja y carta de marear, apenas precedido por los *gastadores* provistos de hachas de abordaje; a continuación los artilleros e infantes armados con lombardas y ballestas... Y, en medio de ellos, con templones y rodelas para su guarda el corpulento de don Simón de Alcazaba.

Este, contemporizando siempre, mandaba pero no decidía nada. Creyendo disimularlo mejor, hizo lo que algunos flojos: nombrar un adjunto de carácter: Mori. (Lo que es un grave error porque el don de mandar, no puede suplementarse; poned un hombre blando al lado de otro de carácter y veréis, bien pronto, como éste o se aleja de su lado o se pone delante de él). Por otro lado, cuando de alguna manera se lesiona intereses de segundones ambiciosos, debe esperarse pronto la cólera de éstos. Los restantes capitanes — Arias, Martínez y Sotelo — creyéronse, a partir de entonces, desplazados con lo que el resultado de la designación de Mori fué contraproducente, pues había ya: cinco contra quienes vociferar; dos a quienes desobedecer y ninguno resuelto a bregar por la autoridad del jefe.

Desconsolado, Alcazaba habría paseado gustoso el mando por todos y cada uno de los capitanes; empero, obrando así, aún hubie-

ra disgustado a sus alféreces hoy, y a sus cabos de escuadra mañana. Entonces enfermó y regresó a bordo.

Los expedicionarios siguieron adelante con sus astrolabio, aguja y carta de marear. Llevaban el NE. en la frente. Durante la marcha encontraron algunos indios a quienes, de inmediato, les preguntaron dónde estaba el oro. Una india les señaló con todos los dedos de la mano y ellos, interpretando cinco jornadas, prosiguieron con ansiedad su marcha. En el ínterin, la tierra burlábase de ellos amenazándoles de muerte. No hallaban ni agua, árboles o caza. Tal vez la india, que siempre respondía a las preguntas sobre el oro mostrando sus cinco dedos, quisiera señalar cinco lunas o cinco cerros o cualquier otra cosa.

Mientras corrían tras la eterna quimera, llegaron al río Chubut que llamaron Guadalquivir y donde encontraron, dice Alonzo Vehedor, « la más linda y sustanciosa agua que los hombres vieron, porque aunque la bebíamos en ayunas, nunca a hombre hizo mal ni se acordó de vino ». Con el hallazgo del agua y el olvido del vino renació, por poco tiempo, la calma; encontraron una tribu y su gente, preguntado por el lugar del oro, contestaban exhibiendo los cinco dedos de la mano. Algunos querían proseguir la marcha al país del oro; los más se negaban a continuar el viaje. De ello resultó que apresaron al teniente de Alcazaba y riñeron los capitanes, « aunque era — dice el relato — postrero día de Pascua Florida del año de 1535 ». Cuando la gente vió reñir a sus capitanes, disputaron entre ellos y « se desgraciaron ». En balde hubo pregones castigando con pena de la vida porque, como no había nada que comer, daba la mismo morir de hambre que sacar la lengua en la horca. La gente, desalentada, desfraudada, dirigida por capitanes que nunca se ponían de acuerdo, retornaron a las naves cada cual por su lado.

Los primeros que llegaron — gente de Arias — quisieron hacer pagar sus penas a don Simón de Alcazaba. El mismo Arias, asesinó con su propia arma a su jefe mientras dormía a bordo de su nave fondeada en el tranquilo puertito del Oven. Si no lo hubiera hecho él, igual suerte corriera en manos de los otros. Esa noche, en que mataron a Alcazaba, cayó también el despensero y volvió a correr en abundancia el vino y se repartieron los triunfadores las ropas de los muertos que eran muchos. Al día siguiente los revoltosos se apoderaron también de la « Madre de Dios »; nombraron nuevos capitanes para ambas naves y dispusiéronse a salir « a robar a toda ropa ». Empero, aún para piratear, debía haber uno que mandara y esos hombres no estaban acostumbrados a obedecer a nadie.

Antes de abandonar el puertito cerrado del Oven, disputóse nuevamente. El capitán Mori dió muerte a Arias haciéndose esas « justicias » que consistían, al fin de cuentas, en ahorcar o degollar a los del bando contrario. Ochenta de los que antes tripularon las naves, murieron en la horca o perecieron en tierras del Chubut. Al intentar abandonar la costa del San Javier, solo tenían para comer carne de lobos — que no otra cosa merecían como castigo quienes como lobos se conducían. ¡Sin embargo aún quedaba vino!

Las dos embarcaciones zarparon con distinto rumbo. Cuando lo hizo la « Madre de Dios » fué para hundirse con toda su gente, a excepción de algunos embarcados en su chalupa. No se perdió la nave, ni por metralla, ni por temporal; estaban desarmadas lombardas y falconetes, había calma en el cielo y estaba plano el mar...

En la « San Pedro » que navegaba proa al Norte continuaron las revueltas; las muertes, los trabajos penosos de la mar, y largo sería seguirla en sus tristes singladuras...

Al llegar a la Bahía de Todos los Santos, también se perdió esa nave. De los 110 hombres de su bordo solo algunos 18 ó 20 salvaron, los cuales vieron, no sé si con placer o con odio, arribar un día a la chalupa de la otra embarcación hundida. El peligro contra el indio los unió y dice el relato que acotamos, que entregaron a los infieles todo el vino que aún les quedaba por agua para beber.

La travesía de Bahía a Santo Domingo, a donde al fin arribaron, deparóles otras nuevas vicisitudes y por supuesto nuevas muertes por hambre y sed. Pero como ya no había vino, y tuvieron la suerte de encontrar un hombre sano que mandara, llegaron a destino.

Tal la expedición donde, es fama, llevóse mucho vino y se tuvo por jefe al hombre corpulento y tolerante que hubo en aquel bueno de don Simón de Alcazaba. Tal vez para recordarnos que el talento de los hombres no basta para conducir a feliz puerto sus empresas que reclaman, constantemente, ese imponderable del carácter nivelador eterno de cerebros y voluntades que es secreto final del éxito.

CONTRIBUTION A LA CONNAISSANCE DE NOUVEAUX DÉRIVÉS ARSÉNIÉS AROMATIQUES

I. — SUR QUELQUES ACIDES ARSINIQUES ET ARSÉNO-DÉRIVÉS DU DIPHÉNYLMÉTHANE

Par ENRIQUE V. ZAPPI et JUAN F. SALELLAS (1)

Résumé

On a préparé pour la première fois, les suivants dérivés arseniés du diphénylméthane: l' acide diphénylméthane-diarsinique (I), son dinitro (II); l' acide arsénodiphénylméthane-diarsinique (III), son tetranitro, l' acide tetranitro-arsénodiphénylméthane-diarsinique (V) et le tetranitro-diarséno-diphénylméthane (VI).

Les dérivés arseniés du diphénylméthane semblent ne pas être mentionnés dans la litterature chimique.

En soumettant le diazoïque du 4-4-diamino-diphénylméthane a la réaction de Bart (2) nous avons préparé l'acide diphénylméthane-4-4'-diarsinique (I) lequel nitré d'après Michaelis (3) donna l'acide 2-2'-dinitro-diphénylméthane-4-4'-diarsinique.

La réduction des groupes arsiniques de ces deux acides au moyen de l'acide hypophosphoreux en suivant les méthodes décrites par Palmer (4) et Auger (5) nous a conduit aux acides 4'-4'''-arséno-bis [diphénylméthane-4-(4'')-arsinique] (III); 4'-4'''-arseno-bis [2-2'-(2''-2''')-dinitro-diphénylméthane-4-4''-arsinique] (V) et le 4-4''-(4'-4''')-diarseno-bis [2-2'-(2''-2''')-dinitro-diphénylméthane] (VI).

Par contre, les tentatives de synthétiser le diarseno-bis-diphénylméthane (IV) n'ont pas réussi.

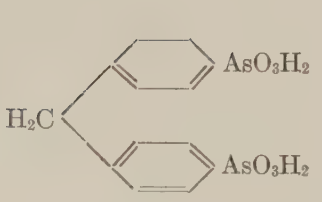
(1) Ce travail fait partie de la Thèse présentée a la Facultad de Química y Farmacia de la Universidad Nacional de La Plata, par M. J. F. Salellas pour obtenir le degré de Docteur en Chimie.

(2) Bart D. R. P. 250264.- Ann., 1922, t, 429; p. 55-122

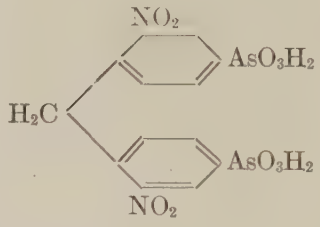
(3) Michaelis, Ann., 1902, t. 320, p. 321.

(4) Palmer et Schattuck, J. Am. Chem. Soc., 1923, t. 45, p. 3023.

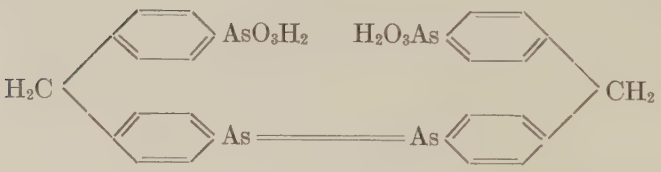
(5) Auger, C. R., 1904, t. 138, p. 1705.



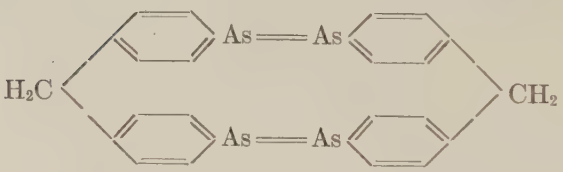
I



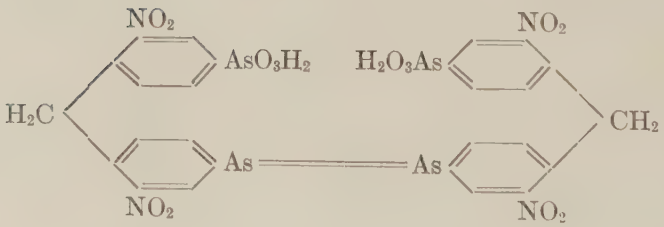
II



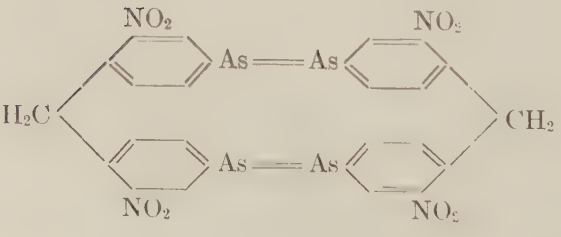
III



IV



V



VI

Partie Experimentale

Obtention du p-p'-diamine-diphénylméthane. — Nous avons essayé cette préparation par la réduction du dinitre-diphénylméthane avec le chlorure stanneux et par la condensation de l'aniline avec le formol ou le méthylal.

Le premier procédé ne donne que des rendements pauvres et des autres deux, celui qui consiste a condenser l'aniline avec le méthylal est le plus avantageux par sa practicité, son rendement et la pureté du produit final, ainsi que l'a remarqué son auteur (6).

152 gr. de chlorhydrate d'aniline, 375 cc. d'eau et 46 gr. de méthylal sont chauffés au bain marie avec condensateur à reflux pendant 3 heures en augmentant la température de 60 à 90°. On continue à chauffer encore pendant 1 heure sans condensateur, pour éliminer le méthanol, après quoi on précipite le monochlorhydrate de diamine-diphénylméthane par addition de 24,5 gr. de Na(OH) dissous dans un peu d'eau.

Pour obtenir la base libre on neutralise la solution du monochlorhydrate dans du ClH, avec un excés de soude caustique. Cet alcali est additioné en deux portions: la première favorise la précipitation de résines colorées, qui sont separées par filtrations, et la deuxième produit la cristallisation de la base.

Celle-ci, recristallisée dans l'alcool dilué forme des lamelles incolores qui fondent a 89°.

Acide diphénylméthane-4-4'-diarsinique (I), $C_{13}H_{14}O_6As_2$. — 33 gr. de diamino-diphénylméthane sont dissous dans 290 cc. de HCl 1 : 1, en chauffant jusqu'a dissolution. Dans la solution refroidie on ajoute 250 gr. de glace et on diazote avec 26 gr. 5 de nitrite de sodium dissous dans 60 cc. d'eau. On étend le diazoique avec de l'eau et de la glace jusqu'a 3 litres et on neutralise son acidité avec Na(OH) 4 N, en employent le rouge congo comme indicateur.

Séparement on prepare la solution d'arsenite de sodium en dissolvant 76 gr. 6 d'anhydride arsénieux dans 783 cc. de Na(OH) 2 N qui a dissolution terminée est etendue jusqu'a 2 litres avec de l'eau et additionée de gr. 0,5 d'oxyde de cuivre, et de 2 à 5 cc. de solution au 10% de sulphate cuivrique.

La solution du diazoique est versée lentement dans celle-ci; après

(6) Rivier et Farine, Helv. Chim. Acta, 1929, t 12; p. 856.

4 heures de contact on chauffe à l'ebullition pour terminer le dégagement d'azote. On filtre, et le filtrat encore chaud est acidulé avec HCl jusqu'a virage du rouge congo, et laisé refroidir pour en favorir la precipitation de résines.

Après une nouvelle filtration le liquide est concentré au bain marie jusqu'a 2 litres et alors par le refroidissement et le repos se dépose l'acide diphénylméthane-p-p'-diarsinique.

Pour le purifier, 25 gr. du produit brute son suspendus dans un litre d'eau et dissous en ajoutant du carbonate d'ammonium. On précipite fractionnellment avec HCl dil. Les dernières fractions peuvent être obtenues cristallisées.

Analyse. — 0 gr. 1698; 0 gr. 1269; et 0 gr. 1741 de substance donnèrent 0 gr. 1272; 0 gr. 0948 et 0 gr. 1275 de $As_2O_7Mg_2$. 0 gr.1504 de substance brulée ont donné 0 gr. 2090 de CO_2 et 0 gr. 0512 d'eau. Trouvé, As %: 36,10; 36,06; 36,36. — C %: 37,89. — H %: 3,81. — Calculé pour $C_{13}H_{14}O_6As_2$: As % 36,06; C %: 37,50; H %: 3,36.

Propriétés. — Cristallise en aiguilles de base carré. Il ne fond pas: chaffé au dessus de 250° il se renfle et carbonise en éméttant une odeur alliacée et volatilisant de l'anhydride arsenieux. Il est insoluble dans l'éther, les alcools éthylique et méthylique, le nitrobenzene, l'acide acétique et la piridine. Il se dissout très difficilement dans l'eau froide; à l'ébullition il le fait très lentement jusqu'à 6-8 gr. par litre qui après quelques jours de repos se séparent precipités en noyaux. Le HCl 1 : 3 et chaud en dissout jusqu'a 60 gr. par litre qui sont précipites comme une poudre amorphe et blanche par refroidissement. Il se dissout dans les alcalis et les carbonates que décompose facilment. Son equivalent chimique detérminé alcalimétriquement avec phénolftaléine, correspond à celui d'un acide bibasique. Il se dissout facilment dans SO_4H_2 et NO_3H conc. mais ne se nitre que par la mélange sulfo-nitrique. Ses solutions chlorhydrique précipitent par l'hydrogène sulfuré un composé amorphe et blanc.

Acide 2-2'-dinitro-diphénylméthane-4-4'-diarsinique (II) $C_{13}H_{12}O_{10}N_2As_2$. — 5 gr. d'acide diphénylméthane-diarsinique dissous dans un mélange de 15 cc. de SO_4H_2, d. 1,8 et 15 cc. de NO_3H, d. 1,4, sont maintenus au bain-marie entre 50 et 70°. On verse le mélange sur une quantité d'eau, et il se précipite le dérivé dinitro. Rendement: 86 % de la théorie. Le produit peut être purifié par cristallisation dans l'eau.

Analyse. — 0 gr. 0785 et 0 gr. 0978 de substance donnèrent 0 gr. 0487 et 0 gr. 0606 de $As_2O_7Mg_2$. — 0 gr. 3513 de substance donnèrent 16 cc. 9 de N à 23° et 752 mm. 5. — Trouvé: As %: 29,94 et 29,58. — N %: 5.47 — Calculé pour $C_{13}H_{12}O_{10}N_2As_2$: As %: 29,62; N %: 5,53.

Propriété. — Cristallise de l'eau en petites lamelles microscopiques jaunes, très minces, oncteuses au tact, insolubles dans les solvants organiques communs, solubles en HCl au tiers, soluble dans les alcalis et carbonates donnant une solution jaune, que par neutralisation le précipite comme une poudre très facilement soluble en eau chaud. Par contre le produit cristallisé est difficilement soluble. Il ne fond pas et a temperature élevée il se renfle et se carbonise rapidement.

En solution acide cette substance est réduite a arseno-dérivé par l'acide hypophosphoreux.

Acide arséno-diphénylméthane-diarsinique (III) $C_{26}H_{24}O_6As_4$. — A 2 gr. d'acide diphénylméthane-diarsinique très pur dissous dans 200 cc. de SO_4H_2 au tiers et chauffé au bain marie bouillant on ajoute 4 gr. 2 d'hypophosphite de sodium dissous dans SO_4H_2 au tiers en maintenant pendant 1 à 2 heures la temperature. Il se forme tout d'abord une substance caséeuse et après une poudre jaune, lourde. On filtre, on sépare physiquement la substance caséeuse en la rejetant. Le reste est bouilli avec de carbonate d'ammonium, filtré et lavé.

Analyse. — 0 gr. 1084 et 0 gr. 0968 de substance donnèrent 0 gr. 0921 et 0 gr. 0831 de $As_2O_7Mg_2$. — Trouvé, As %: 41,02 et 41,44. Calculé pour $C_{26}H_{24}O_6As_4$, As %: 40,99.

Propriétés. — C'est une substance amorphe jaune citron, insoluble dans le solvants organiques et dans les solutions d'alcalis ou de carbonates. Il ne fond pas et se dissout facilement en SO_4H_2 et NO_3H.

Acide tetranitro-arseno-diphénylméthane-diarsinique (V) $C_{26}H_{20}O_{14}N_4As_4$. — 1 gr. d'acide dinitro-diphénylméthane-diarsinique est dissous à l'ébullition dans 70 cc. de SO_4H_2 au tiers et chauffé au bain marie bouillant est additioné de 0 gr. 48 de hypophosphite de sodium dissous dans de l'acide sulfurique de la même concentration en maintenant pendant une heure au bain-marie, en agitant. On filtre et lave la poudre avec de l'eau chaud. Rendement 100 % de la théorie. On dissout le produit en carbonate d'ammonium et on precipite

avec SO_4H_2 dil. en soutenant au bain-marie jusqu'à ce que le précipité gélatineux qui s'est formé devienne pulvérulent.

Analyse. — 0 gr. 1103 et 0 gr. 0883 de substance donnèrent 0 gr. 0749 et 0 gr. 0593 de $As_2O_7Mg_2$. 0 gr. 3563 et 0 gr. 2791 de substance donnèrent 20 cc. 5 de N à 23°7 et 762 mm. et 15 cc. 2 de N à 23°5 et 763 mm. — Trouvé: As %: 32,79, et 32,45; N %: 6,45 et 6,12. Calculé pour $C_{26}H_{20}O_{14}N_4As_4$ As %: 32,90; et N % 6,14.

Propriétés. — C'est une poudre amorphe, jaune, plus ou moins verdâtre, qui ne fond pas, mais qui carbonise a haute temperature, insoluble dans les solvants communs, soluble en milieux alcalins et capable de décomposer les carbonates. Il précipite gélatineux de ses solutions alcalines par l'action des acides, même organiques, mais chauffé au bain-marie dévient pulvérulent.

Se dissout lentement dans SO_4H_2 en prennant une couleur rouge; avec NO_3H elle produit effervescence et elle régenère partiellement acide dinitro-diphénylméthane-diarsinique, ainsi que le démontre cette expérience: 0 gr. 5 de la substance furent chauffés a ébullition avec NO_3H conc. Une fois étendue la solution avec de l'eau elle précipite a coté des gouttes huileuses, une substance qui se purifia en la précipitant plusiers fois de sa solution alcaline. — Analyse: 0 gr. 0824 de cette substance donnèrent 0 gr. 0512 de $As_2O_7Mg_2$. — Trouvé, As %: 30. — Calculé pour $CH_2(C_6H_3NO_2 \cdot AsO_3H_2)_2$, As %: 29,62.

Tetranitro-diarseno-diphénylméthane (VI) $C_{26}H_{16}O_8N_4As_4$. — Il est preparé comme l'acide tetranitro-arséno-diphénylméthane-diarsinique mais en employant une quantité d'acide hypophosphioreux cinq fois plus grandes que celle indiquée et en chauffant au bain-marie bouillant pendant 14 heures. Tout d'abord il se forme un précipité jaune, identifié par son aspect con l'acide qu'on a antérieurement décrit. Au bout de quelques heures el dévient couleur orange. On filtre et on lave. On chauffe au bain-marie avec de carbonate d'ammonium. et on filtre et lave de nouveau.

Analyse — 0,0913 et 0 gr. 0737 de substance donnèrent 0 gr. 0687 et 0 gr. 0555 de $As_2O_7Mg_2$. — 0 gr. 3881 de substance donnèrent 23 cc. 8 de N à 23° et 760 mm. 1. — Trouvé, As %: 36,33 et 36,35; N %: 6,89. — Calculé pour $C_{26}H_{16}O_8N_4As_4$, As %: 36,94; N % 6,89.

Propriétés. — C'est une substance pulverulente, amorphe, rougeatre orangé, insoluble dans les solvants communs, soluble dans SO_4H_2 conc. se colorant en rouge; avec NO_3H, elle produit une effervescence, et après une réaction moyenement violente en crépitant.

Cette récherche a été partiellement subventionnée par la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias, dont nous remercions la contribution.

Contribución N.º 18. - Departamento
de Quimica Orgánica.
Facultad de Quimica y Farmacia
La Plata (Argentina)

ANOMALIAS EN LAS CORNAMENTAS DEL HUEMUL

Por CARLOS RUSCONI

Si bien es cierto que las anomalías de número son muy frecuentes en las cornamentas de los ciervos nacidos en medios que no son los naturales (Parques, Jardines Zoológicos, etc.), este fenómeno, sin embargo, también se manifiesta en aquellos animales que han vivido toda la vida en estado silvestre.

Conozco anomalías de número en diversos géneros de ciervos europeos como así también en americanos: *Mazama*, *Ozotoceros*, *Blastoceros*, *Hippocamelus*, etc., algunas de las cuales bastante interesantes. Con respecto a *Mazama*, las anomalías consisten por lo regular, en una mala formación de la vara y a veces del adictamento de un mogote supernumerario más o menos desarrollado.

En *Ozotoceros*, las anomalías son un poco más frecuentes y consisten ellas en la presencia de un mogote o candil supernumerario que puede dar origen a una mala distribución de la cornamenta y otras deformaciones más. Hechos de esta naturaleza han sido recordados por varios autores (Burmeister 1879, p. 464), Lydekker, Kraglievich (1932, p. 384, láms. LXIV y LXV), etc.

Tampoco se hallan exentos de estos apéndices supernumerarios las cornamentas del ciervo de los pantanos (*Blastoceros dichotomus*, III) como lo han puesto de manifiesto Burmeister en la obra citada pág. 461, Carette (1922, fig. 6), Kraglievich, *op. cit.* lám. LXIII) etc.

Del mismo modo, el conocido ciervo andino (*Hippocamelus bisulcus* Mol.) ha ofrecido también bastantes elementos para esta clase de investigaciones. Con respecto al Taruga (*H. antisensis* d'Orb) del noroeste, Bolivia, Perú, etc., las anomalías son menos frecuentes o no existen como lo ha expresado Dabbene en 1911, después de haber examinado unas 40 cornamentas de este ciervo, cuyos restos fueron hallados en enterratorios indígenas prehispánicos del noroeste argentino.

Para los típicos Huemules del sur de Chile y sudoeste de la Argentina (*Hippocamelus bisulcus*) ya las habían mencionado Philippi y

Dabbene hace muchos años atrás. Otro de los autores que se ha ocupado de este asunto es Carette quién, en la obra citada, figura 6, ofrece las vistas de dos especímenes uno con un candil y el segundo ejemplar con dos candiles supernumerarios.

Igualmente se han recordado anomalías de este tipo en cornamentas fósiles pero me eximo de enumerarlas por cuanto este artículo tiene carácter de preliminar.

II

A esta breve reseña sobre algunas de las variaciones de los cuernos de nuestros cérvidos, debe agregarse ahora otros ejemplares que ofrecen particularidades interesantes al respecto y son las que motivan estas líneas.

Trátase, en efecto, de los restos de 7 individuos de *H. bisulcus* cazados algunos, y otros recogidos sus restos en una pequeña extensión próxima al Lago San Martín en territorio de Santa Cruz, por el señor Santiago Rabbone. Este señor ha tenido en su campo numerosas parejas de este ciervo y no pocas son las que dieron crías habiéndome proporcionado también algunos detalles de su biología todavía poco conocidos.

Esta primera remesa — que ha tenido la gentileza de obsequiarme y por cuyo gesto quédole muy agradecido —, consta de 5 cajas craneanas provistas de sus respectivas cornamentas, más dos ramas sueltas pertenecientes a individuos de diferentes edades. A juzgar por las indicaciones del señor Rabbone y de lo que tengo observado en estos ciervos, resulta que en esa remesa se encuentran Huemules desde 2 hasta 6 años de edad, aproximadamente.

Aun cuando en otros géneros la cornamenta ofrece un índice más seguro para poder calcular su edad relativa, hay géneros como *Mazama*, *Pudua*, *Hippocamelus*, etc., en que esos cálculos resultan ser más dificultosos cuando no se tiene un conocimiento de su biología o bien cuando no se dispone de numerosos ejemplares que sirvan de término de comparación, por el hecho de que las cornamentas son sencillas, de un solo mogote en los dos primeros géneros y bifurcadas o en horqueta, en el tercero. Empero, esta labor puede resultar a veces relativamente más fácil si se tiene en cuenta las características de los cuernos tales como la longitud, la robustez de la vara y de su respectiva garceta como en el caso de los Huemules.

III

Durante el primer año de vida del huemul no se manifiestan verdaderas escrecencias queratodérmicas, sinó tan sólo una protuberancia que las más de las veces corresponde al ceratóforo de los huesos frontales. Recién en el segundo año (ejemplar n° 495 de la colección Zoológica Rusconi, fig. 1), aparece bien definida la cornamenta.

Fig. 1. — Cuerno normal de Huemul (*Hippocamelus bisulcus*) de dos años de edad, n° 495.
Fig. 2. — Cuerno normal de Huemul n.° 496, de 3 años de edad.
Fig. 3. — Cuerno normal de Huemul n.° 499, de 5 á 6 años de edad; reducidos a 1|3 del natural.

Consiste ésta en la vara principal la cual es casi recta vista lateralmente pero curvada hacia afuera en su base y vuelta a invertirse hacia adentro en su tercio superior cuando se la ve de frente.

En la roseta o burr se encuentran ya definidas las rugosidades aunque no tan destacadas como en los individuos de mayor edad. En la mitad inferior de la vara aparecen los surcos longitudinales cuyos bordes salientes están cubiertos irregularmente de protuberancias o borlitas óseas relativamente más abultadas que en otros

especímenes de mayor edad, por lo menos de los que poseo. Además, los surcos son menos profundos y las aristas laterales que los dividen tienen aspecto más cortantes en estos últimos. La sección de la vara en su base (beam), es casi cilíndrica, o cilíndrico-aplanada lateralmente, pero la figura de esta sección se modifica sensiblemente con la edad. En los ejemplares de 4 años aproximadamente (n° 496, fig. 2), en el cual la vara principal y la garceta se encuentran ya bien desarrolladas, se advierte inmediatamente arriba de la escotadura entre la vara y la garceta, una sección cilíndrico-triangular; siendo atrás de superficie convexa y de sección triangular en la parte anterior. En estos individuos como en otros de más viejos, las pequeñas aristas longitudinales se extienden más o menos hasta las tres cuartas partes de la longitud de la vara quedando el resto o parte superior desprovista de rugosidad y en consecuencia, lisa. Lo mismo ocurre con la garceta.

Con la edad, en las cornamentas de los huemules no sólo se desarrolla la garceta sino que también se advierten fenómenos comunes a otros cérvidos tales como: la prolongación y desarrollo máximo de la vara principal, 2° su respectivo engrosamiento desde la base hasta la corona, 3° la recurvación definitiva de la vara y de la garceta orientadas en sentidos distintos. Uno de los ejemplares adultos y normales pertenecientes a un animal de 5 á 6 años de edad (n° 499, fig. 3), presenta en su vista lateral los siguientes caracteres: La vara, en su tercio inferior, se curva hacia atrás, continúa un buen trecho con una dirección rectilínea y finalmente se curva levemente hacia adelante. La garceta, que nace en la cara anterior de la vara, sigue una dirección perpendicular hacia adelante y arriba de modo que en la mitad de su recorrido vuelve a invertirse hacia atrás, a veces en forma muy acentuada como lo demuestra la figura recién mencionada.

Vista de adelante, la base de la vara sigue un recorrido casi rectilíneo hasta la altura de la garceta; luego se curva hacia afuera para volver a invertir su recorrido con la punta o corona del cuerno hacia adentro, describiendo en cierto modo una figura liriforme. La garceta sigue más o menos el mismo recorrido con la diferencia de que la parte apendicular se inclina mucho más hacia afuera dando la impresión de que estuviese caída.

Por otra parte, la vara presenta una fuerte arista longitudinal sobre la cara externa que se encuentra bien desarrollada generalmente a la altura del nacimiento o raíz de la garceta. De modo que entre esta arista y la otra situada en el borde anterior de la vara

media una superficie plana, razón por la cual la vara tiene en ese lugar una sección semiprismática adelante y semicircular hacia atrás. Pero en los ejemplares anormales (n° 497, fig. 4; n°500 fig. 5; n° 501 fig. 6), la cresta lateral es muy destacada y entre ella y la cresta o arista anterior de la vara se advierte una alargada y a veces profunda fosa muy característica.

Fig. 4. — Cuerno anormal de Huemul n.° 497, de 4 años de edad; reducido a 1|3 del natural.

Entre la vara y la garceta (a la altura de la escotadura), existe una fuerte depresión que da origen a un acentuado adelgazamiento en el borde de la escotadura. Mientras que por la cara interna de la cornamenta, esa zona presenta tan sólo una superficie plana y levemente excavada en otros ejemplares.

IV

Anomalías. — Las anomalías que presentan algunos de los cuernos son de diverso órden: 1° Anomalías de dirección o asimetría entre ambas cornamentas; 2° Anomalías de número o sea de candiles supernumerarios; 3° Anomalías con caracter de monstruosidad y de cuyas últimas no existen indicios en la presente remesa.

En el primer caso se encuentra el espécimen n°496 cuyas varas no se yerguen simétricamente y además son relativamente rectas

vistas en sentido lateral. En el ejemplar n° 499 existe también cierta asimetría en las garcetas pero que tanto esto como otros casos más o menos similares no tienen mayor importancia.

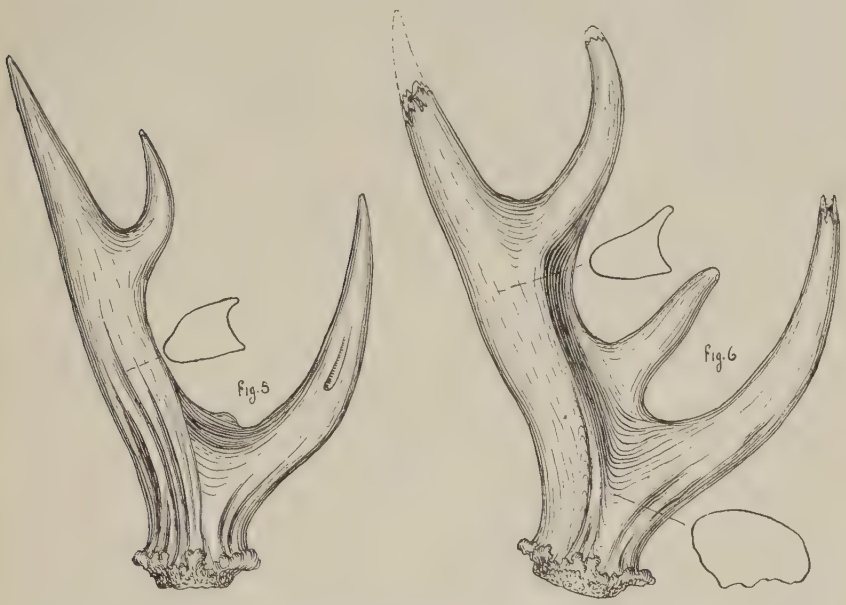


Fig. 5. — Cuerno anormal de Huemul n.° 500 de 4 años de edad; reducido a 1|3 del natural.
Fig. 6. — Cuerno anormal de Huemul n.° 501, de 4 á 5 años de edad; reducido a 1|3 del natural.

Más interesantes son en cambio las anomalías de número porque ello generalmente produce modificaciones manifiestas en la dirección de la vara y de la garceta. Así, por ejemplo, en el ejemplar n° 496 hay tan sólo un principio de candil supernumerario en la cara anterior de la rama del lado izquierdo. En el ejemplar n° 497 (fig. 4), los candiles — que los designo con el nombre de segundo candil supernumerario —, son muy desarrollados. La mitad de su extensión se dirige casi en ángulo recto con relación a la vara principal para curvarse luego en sentido vertical y hacia arriba en la segunda mitad de su longitud. Además, el candil supernumerario del lado izquierdo se encuentra a 2 centímetros más arriba que el homólogo del lado opuesto. Un cuerno anormal de este tipo lo ha ilustrado Carette en 1922 (fig. 6).

En el ejemplar n° 500 (fig. 5) existe el segundo candil supernumerario bien desarrollado cuya escotadura se encuentra a 150 milímetros más arriba que el disco. En el ejemplar n° 501 (fig. 6), existen

por el contrario dos candiles supernumerarios los que sumados a los otros normales resulta que este cuerno tiene cuatro puntas. El primer candil adicional, que es más corto, se encuentra su escotadura a 103 milímetros más arriba que el disco; mientras que el segundo candil es mucho más largo y su escotadura aparece a los 150 milímetros más arriba que el disco. Tanto la garceta como el segundo candil supernumerario y la vara se dirigen casi sobre un mismo plano, esto es, que no muestran una bifurcación acentuada cuando la cornamenta es vista de adelante.

Fig. 7. — Cuerno normal de Huemul (*H. bisulcus*).
Fig. 8. — Cuerno normal de Corzuela (*Mazama simplicicornis*).
Fig. 9. — Cuerno normal de Venado (*Ozotoceros bezoarticus*); todos reducidos a 1|3 del natural.

Aparte de las diferencias osteológicas y dentales que existen entre los Huemules, Corzuelas y Venados, en las figuras 7, 8 y 9 reproduzco esquemáticamente las cornamentas normales del lado derecho de cada uno de esos ciervos al sólo objeto de ilustrar al lector sobre sus principales características morfológicas.

Medidas de la caja craneana del Huemul (*Hippocamelus bisulcus* (Mol.)

Números	495	496	497	498	499
Ancho de la caja craneana	76	—	80	79	83
Ancho máximo entre las márgenes de los huesos occipitales	72	77	81	82	86
Altura del occipital desde el basioccipital	61	65	64	63	66
Ancho bicondilar	49	50	53	52	56
Longitud de los parietales en la línea media	54	57	58ap	57	60 ap
Medidas de uno de los ceratóferos					
Diámetro anteroposterior debajo de la roseta	19	26	34	37	35
Diámetro transverso debajo de la roseta	21	26	36	38	38
Altura de la roseta desde el plano frontal (línea media)	17	20	20	21	19
Altura de la roseta desde el borde superior de la órbita	50	47	33	31	33

Medidas de los cuernos

Números	495	496	497	498	499	500	501
Longitud de la vara desde el disco hasta la punta sin cortar la curvatura	140	255	245	255	295	224	250ap.
Longitud de la garceta desde la base de la escotadura	—	95	80ap.	130	110ap.	118	130ap.
Longitud del primer candil supernumerario	—	—	—	—	—	—	70ap.
Longitud del segundo candil	—	—	65	—	—	50	90ap.
Diámetro anteroposterior de la roseta	32	46	54	58	60	51	62
Diámetro anteroposterior de la base de la vara arriba de la roseta	26	31	37	40	44	39	46
Diámetro transverso (idem).	20	25	35	38	43	36	38
Distancia máxima entre la vara y la garceta (cara exterior)	—	100	—	130	116	131	155
Altura de la escotadura principal desde la base del disco	—	66	76	76	98	74	76

NOTA: ap. medida aproximada.

Bibliografía

Carette, E., *Cérvidos actuales y fósiles de Sud América*, en *Revista del Museo de La Plata*, vol. XXV, pp. 393-472, Buenos Aires, 1922.

Burmeister, G., *Description Physique*, vol. III, Buenos Aires, 1879.

Dabbene, R., *Sobre la existencia del Huemul de Bolivia y Perú» Odocoileus (Hippocamelus antisensis» (d'Orb) y del avestruz petizo (Rhea Darwini) Gould en el N.W. de la República Argentina*, en *Anales del Museo de Hist. Nat.* vol. XIV, Buenos Aires, p. p. 293-307, 1911.

Kraglievich, L., *Contribución al conocimiento de los ciervos fósiles del Uruguay*, en *Anales del Museo de Hist. Nat.* (2), vol. III, 355-438, Montevideo, 1932.

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

*(Continuación *)*

13. **Resolución de los sistemas $S_h(m, n)$.** En cuanto a las soluciones de los $S_h(m, n)$ compatibles, no interesan, en este estudio; pero daremos, brevemente, la forma de obtenerlas todas ya que se trata de una cuestión relativamente simple(1). Por razones de brevedad, nos expresaremos en términos geométricos.

Sabido es que la región poliédrica convexa de $S_h(m, n)$, en E_n, para $h > 1$, sea o no finita, puede descomponerse de varios modos mediante hiperplanos auxiliares, en regiones $(h + 1)$-édricas finitas, si la región es finita, es decir, si se trata de un hiperpoliedro convexo, y en regiones $(h + 1)$-édricas finitas e infinitas y regiones h-édricas, es decir, angulares, si se trata de una región poliédrica infinita.

(*) Véase pág. 86. Entrega II. Tomo CXXII. Agosto 1936.

(1) De estas cuestiones se han ocupado, incidentalmente, algunos autores y han resuelto casos particulares. Los que han tratado el problema en general son: H. Minkowski en su *Geometrie der Zahlen.* Leipzig 1910.

L. L. Dines: *Systems of Linear Inequalities,* en Annals of Mathematics. Vol. 20. Año 1918, pág. 191-199.

W. B. Carver: *Systems of Linear Inequalities,* en Annals of Mathematics. Vol. 23. Año 1921, pág. 212-220.

Ruth Wyckliffe Stokes: *A Geometric Theory of Solution of Linear Inequalities,* en Transactions of the American Mathematical Society. Tomo 33. Año 1931, pág. 782.

Véase también L. L. Dines and N. H. Mc Coy: *Linear Inequalities,* pág. 37, en The Royal Society of Canada, Mathematical Physical and Chemical Sciences Third Series. Volume XXVII, section III. May, 1933. Ottawa, en el que se encuentra, además, una bibliografía bastante completa de la cuestión.

L. L. Dines: *Convex Extension And Linear Inequalities* en Bulletin of the American Mathematical Society, Volume XLII-6-June-1936, pág. 353.

Y es claro que, en virtud (8), dicha descomposición basta efectuarla en el espacio de h dimensiones, o sea, en el espacio de pertenencia de la figura. Correlativamente, el $S_h(m, n)$ queda descompuesto en otros tantos sistemas normales compatibles de características h y de $h+1$ o de h inecuaciones. Las inecuaciones de estos sistemas, componentes del sistema $S_h(m, n)$, se forman con inecuaciones suyas y con otras correspondientes a hiperplanos auxiliares que se determinan por medio de la matriz del sistema del cual se conocen los *vértices* y, por lo tanto, las *aristas*, etc.

Todo se reduce, entonces, a saber calcular las soluciones de dichos sistemas elementales componentes del $S_h(m, n)$.

Una descomposición del tipo mencionado puede obtenerse del modo siguiente:

a) Si la región del $S_h(m, n)$ dado, tiene un solo vértice, el sistema se reduce al caso (4, *a*), aún cuando se trate de un sistema totalmente singular, y el problema está resuelto.

b) Si la región consta de más de un vértice, consideremos dos caras cualesquiera; existen siempre porque la región tiene, necesariamente, más de dos caras. Unamos, por un segmento, un punto de una de ellas con un punto de la otra. Por la convexidad, (2, II), todos los puntos interiores al segmento así obtenido son soluciones del $S_h(m, n)$. Sea P, uno de ellos. Si la región es un hiperpoliedro, unamos P con todos sus vértices y, si es una región poliédrica abierta o sea, no acotada, unamos P con todos sus vértices y tracemos, además, por el punto P, hiperplanos paralelos a todas las caras infinitas de la región. Resulta, en ambos casos, descompuesta en un número finito de regiones piramidales finitas de vértice P en el primer caso, y, piramidales finitas, prismas infinitos y regiones angulares, en el segundo. Ahora bien, uno cualquiera de los dos primeros tipos, se descompone, a su vez, en forma análoga con el mismo proceso aplicado a la base, la cual corresponde, (11), a un sistema normal de característica complementaria $h-1$, es decir, de una unidad menos.

Todas estas operaciones geométricas pueden expresarse en forma analítica, mediante relaciones entre los elementos de la matriz del sistema. Los hiperplanos auxiliares que se utilizan resultan perfectamente determinados por tales relaciones.

Sea, entonces, $S_h(h+1, n)$, uno cualquiera de los dos primeros tipos de sistemas componentes elementales. Un resolvente, [7.1], principal del mismo se reduce a la única ecuación de la forma

$$\delta X_{h+1} + \alpha_{1h} X_h + \ldots + \alpha_{1j} X_j + \ldots + \alpha_{11} X_1 = \Delta. \qquad [13.1]$$

A) Si $S_h\,(h+1, n)$ es finito, (12, VI), todos los coeficientes de esta ecuación, entre los cuales no hay ninguno nulo, (12, II), tienen igual signo que Δ, el que tampoco es nulo, de lo contrario sería totalmente singular, y por lo tanto, (12, IV), infinito.

Pongamos:

$$X_j = \lambda_j\, X_{h+1} \qquad [13.2]$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, h)$$

para todo $\lambda_j > 0$.

Resulta en [13.1]:

$$(\delta + \alpha_{1h}\,\lambda_h + \ldots + \alpha_{1j}\,\lambda_j + \ldots + \alpha_{11}\,\lambda_1)\, X_{h+1} = \Delta \quad \therefore$$

$$\begin{cases} X_{h+1} = \dfrac{\Delta}{\delta+\alpha_{1h}\lambda_h+\ldots+\alpha_{1j}\lambda_j+\ldots+\alpha_{11}\lambda_1} \\ X_j = \dfrac{\Delta\,\lambda_j}{\delta+\alpha_{1h}\lambda_h+\ldots+\alpha_{1j}\lambda_j+\ldots+\alpha_{11}\lambda_1} \end{cases} \qquad [13.3]$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, h)\,.$$

Expresiones evidentemente positivas.

Así se obtienen todas las soluciones del sistema componente en cuestión. En efecto, si X^o_{h+1}, X^o_j es una solución, de las [13.2] se deduce que también λ_j debe ser positiva, porque son positivos, por hipótesis, X^o_{h+1} y X^o_j.

B) Si se trata de un sistema componente infinito, no todos los coeficientes α_{1j} de la ecuación [13.1] pueden ser, (9, I), de signo opuesto al de δ. Si es $\Delta \neq 0$, sean α_{11}, α_{12}, α_{13}, ..., α_{1r} los de signo opuesto al de δ y, por lo tanto, (4, V), también a Δ.

Pongamos:

$$\begin{cases} X_j = \lambda_j\, X_{h+1} \\ X_k = \left(-\mu_k - \dfrac{\delta}{r\,.\,\alpha_{1k}}\right) X_{h+1} \end{cases} \qquad [13.4]$$

siendo

$$\begin{cases} \lambda_j > 0 \\ 0 < \mu_k < -\dfrac{\delta}{\alpha_{1k}} \end{cases} \qquad [13.5]$$

para todo $(j = r+1, r+2, \ldots, h)$.
para $(k = 1, 2, 3, \ldots, r)$.

Resulta, en [13.1]

$$(\delta + \Sigma\, \alpha_{1j}\, \lambda_j - \Sigma\, \alpha_{1k}\, \mu_k - \delta)\, X_{h+1} = \Delta \quad \therefore$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_{h+1} = \dfrac{\Delta}{\Sigma\, \alpha_{1j}\, \lambda_j - \Sigma\, \alpha_{1k}\, \mu_k} \\ \\ X_j \;\; = \dfrac{\Delta\, \lambda_j}{\Sigma\, \alpha_{1j}\, \lambda_j - \Sigma\, \alpha_{1k}\, \mu_k} \\ \\ X_k \;\; = \dfrac{-\Delta}{\Sigma\, \alpha_{1j}\, \lambda_j - \Sigma\, \alpha_{1k}\, \mu_k} \left(\mu_k + \dfrac{\delta}{r\, .\, \alpha_{1k}}\right) \end{array}\right. \qquad [13.6]$$

$$(j = r+1,\ r+2,\ \ldots,\ h)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Expresiones positivas para todo λ_j y μ_k que cumplen las condiciones [13.5].

Se obtienen todas las soluciones. En efecto, si X^o_{h+1}, X^o_j, X^o_k, son soluciones; de [13.4] se deduce inmediatamente que es $\lambda_j > 0$ porque X^o_{h+1}, X^o_j y X^o_k son positivas. De la última de [13.4] resulta:

$$\frac{X^0{}_k}{X^0{}_{h+1}} = -\mu_k - \frac{\delta}{r\ \alpha_{1k}} > 0$$

$$\mu_k < -\frac{\delta}{r\ \alpha_{1k}}\ .$$

Como este segundo miembro es positivo, pues δ y α_{1k} tienen, por hipótesis, signos opuestos, existen valores positivos de μ_k, luego se cumplen las [13.4].

C) En este mismo caso, en que el sistema componente es infinito, puede ser también, $\Delta = 0$; entonces no podrán tener, (9, I), todas las α_{1j} igual signo que δ, ni todas signo opuesto al de δ. Este caso se reduce al precedente, pasando al segundo miembro un término que tenga signo opuesto a δ y considerándolo como constante arbitraria positiva.

D) Para un sistema componente angular, como está formado de h inecuaciones y tiene característica igual a h, corresponde al caso $(4, a)$. Sus soluciones se obtienen inmediatamente.

Finalmente, debemos agregar, que todas las soluciones del sistema S_h (m, n) dado, son las de sus sistemas componentes y que fuera de éstas no hay otras, teniendo en cuenta que a ellas deben agregarse los puntos de las caras comunes a cada dos poliedros componentes, que resultan ser soluciones de sus sistemas subordinados

de primer orden, respecto de los polinomios de los hiperplanos auxiliares mediante los cuales se ha descompuesto la región definida por $S_h\ (m,\ n)$. Y nótese que las soluciones no dependen de la manera de hacer esta descomposición.

Con esto queda completamente resuelto el problema porque las soluciones del $S_h\ (m\,,n)$ dado se obtienen del sistema [4.2], sustituyendo en él las variables auxiliares X_i por sus valores y resolviendo un simple sistema compatible de ecuaciones lineales.

En cuanto al caso $h = 1$, es trivial.

§ 5. — SISTEMAS UNITARIOS Y BINARIOS

Antes de establecer nuevas propiedades de los sistemas generales, es menester estudiar, previamente, el caso particular de los sistemas de característica $(h = 1)$ *unitarios*, y, aunque para tal objeto no son indispensables, daremos también, algunas propiedades de los sistemas *binarios*, $(h = 2)$.

14. **Sistemas unitarios, h = 1.** Todo sistema normal, $S_1\,(m\,,n)$, *unitario*, es de la forma

$$a_i\,x + b_i = X_i + Q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

donde, $X_i \geqq 0$, son las variables auxiliares y, Q_i, polinomios lineales homogéneos en las $n-1$ incógnitas no principales. Resulta:

I) *Ningún sistema*, $S_1\,(m,n)$, *unitario, puede tener más de dos determinantes principales.*

En efecto, si tuviese tres determinantes principales (i), (j), (k), indicando con 1, 2, 3, ..., m, las filas de la matriz unitaria $\|a_i\|$, se tendría:

$$Sg.\ (i) = Sg.\ (ij) = Sg.\ (ik) = \ldots$$

$$Sg.\ (j) = Sg.\ (ji) = Sg.\ (jk) = \ldots$$

$$Sg.\ (k) = Sg.\ (ki) = Sg.\ (kj) = \ldots$$

de acuerdo con las notaciones indicadas en (1) y a la definición del número (4) de determinante principal de un sistema. De estas relaciones resultaría:

$$Sg.\ (ij) = Sg.\ (ji)$$

absurdo, si demostramos que es $(ij) \neq 0$.

En efecto, si este determinante fuese nulo, en el resolvente principal relativo al determinante unitario $(i) = a_i$, se tendría una ecuación de la forma

$$a_i X_j - a_j X_i = (ij) = 0$$

y, puesto que el sistema es compatible, debe ser, (4, V),

$$Sg.\ a_i = Sg.\ a_j.$$

De donde, recordando que

$$(ij) \equiv \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad \frac{a_j}{a_i} = \frac{b_j}{b_i} = \rho \geqq 0 \quad \therefore$$

$$a_j = \rho\, a_i \quad ; \quad b_j = \rho\, b_i\ .$$

Una de las dos inecuaciones j, o bien i, sería (1, II), sobrante en el sistema, lo cual no es posible porque ellas corresponden a polinomios principales. La existencia de sistemas unitarios con dos resolventes principales es inmediata.

Ejemplo:

Así el $S_1(2, 1)$, unitario, siguiente, tiene dos resolventes de determinantes (1) y (2) que son principales:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 & [1] \\ -x + 1 > 0 & [2] \end{cases}$$

Geométricamente, un sistema unitario, compatible, representa un segmento o una semirrecta, cuando es unidimensional. Los extremos corresponden a sus sistemas subordinados compatibles de primer o de cualquier orden, porque (10, I), la característica complementaria, (11), $h' = h - k$, vale, en este caso, siempre *cero*, puesto que k es, por lo menos, igual a 1.

II) *Todo sistema unitario, $S_1(m,n)$ compatible, o bien es reducible a dos inecuaciones principales, o bien a una sola, según que tenga dos, o un determinante principal. En el primer caso el sistema es finito e infinito en el segundo y, recíprocamente*, como prueba, (I), la única ecuación

$$a_i X_j - a_j X_i = (ij) \qquad [14.1]$$

a la que se reduce, en ambos casos, todo resolvente principal del mismo, siendo, para el primero,

$$Sg.\ a_j = -\ Sg.\ a_i$$

y para el segundo caso,

$$Sg.\ a_j = Sg.\ a_i\ .$$

También resulta inmediatamente de esta misma expresión, en virtud de (12, I) que:

III) *No existen sistemas unitarios,* $S_1(m,n)$, *singulares finitos.*

15. **Sistemas binarios,** $S_2(m,n)$. Llamaremos sistemas binarios a los sistemas de característica $h = 2$.

I) *Todo resolvente principal de un sistema binario irreducible, carece de ecuaciones homogéneas y,* recíprocamente, *si todos los resolventes principales de un sistema binario carecen de ecuaciones homogéneas, el sistema es reducible a las inecuaciones que corresponden a las filas de sus determinantes principales.*

En efecto, las ecuaciones de sus resolventes son, [7.1], de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\, X_{h+r} + \alpha_{r2}\, X_2 + \alpha_{r1}\, X_1 = \Delta_r \neq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta\, X_{h+s} + \alpha_{s2}\, X_2 + \alpha_{s1}\, X_1 = \Delta_s = 0\ . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \qquad [15.1]$$

Supongamos que este $R_2(\delta)$, sea principal. Para $X_1 = 0$, si es $\alpha_{s2} \neq 0$, se verifican, por la compatibilidad, (4), las ecuaciones de la forma

$$\delta\, X_{h+s} + \alpha_{s2}\, X_2 = 0\ ,$$

luego, debe ser

$$Sg.\ \alpha_{s2} = -\ Sg.\ \delta.$$

Por la misma razón, para $X_2 = 0$, si es $\alpha_{s1} \neq 0$, se verifica

$$\delta\, X_{h+s} + \alpha_{s1}\, X_1 = 0\ ,$$

en consecuencia,

$$Sg.\ \alpha_s = -\ Sg.\ \delta\ .$$

Pero, entonces, siendo α_{s1} y α_{s2} de signo opuesto al signo de δ, las ecuaciones homogéneas de este resolvente principal no se satisfacen para $X_{h+s} = 0$. Los polinomios correspondientes serían, (3, III), sobrantes, contra lo supuesto de que el sistema es irreducible. A la misma conclusión se llega si en una ecuación homogénea del $R_2(\delta)$ principal, considerado, ambos determinantes fuesen nulos separadamente o nó, en cuyo caso es evidente. En cuanto al recíproco, es inmediato, en virtud de (9, IV).

En particular:

II) *Todo sistema binario compatible, totalmente singular, se reduce a dos inecuaciones principales solamente.*

Estas propiedades y la (9, IV, *a*) permiten obtener rápidamente la reducción final de todo sistema binario.

Puesto que todo resolvente principal propio de un $S_2(m, n)$, carece de ecuaciones homogéneas, es decir, es regular, en virtud de (9, IV, *a*), resulta la regla siguiente:

III) *Para reducir un sistema binario a sus inecuaciones principales solamente, se forman sus determinantes principales. Las filas que no pertenecen a ninguno de éstos, corresponden a inecuaciones sobrantes del sistema y de este modo se eliminan todas.*

La reducción a su mínimo número de inecuaciones de un sistema *binario*, encuentra utilísima aplicación en la sumación de series divergentes por el método de Borel[1] para saber cuáles son los puntos singulares que determinan el *polígono de sumabilidad de la serie*, porque, en general, muchos de ellos pueden quedar fuera del polígono.

§ 6. — SISTEMAS GENERALES

16. **Sistemas subordinados de orden h - 1 de un S_h (m, n).** Estamos ahora en condiciones de estudiar las propiedades de los sistemas generales de cualquier número, m, de inecuaciones, de cualquier dimensión, n, y de cualquier característica, $h \geqq 1$. Tienen especial importancia los sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$.

Es claro que para $h = 1$, es decir, si se trata de sistemas unitarios, tales sistemas subordinados no existen. Pero como en este caso resulta $h - 1 = 0$, convendremos en considerar al propio sistema dado como un sistema subordinado suyo de orden nulo.

Recordemos también que para los sistemas con resolventes impropios la cuestión está resuelta, por cuanto son compatibles todos sus sistemas subordinados de cualquier orden. Nos ocuparemos, por lo tanto, de los sistemas con resolventes propios.

Ahora bien, un resolvente propio, [7.1], de un $S_h(m, n)$, puede ser regular o singular. Para evitar distingos fastidiosos convendrá poner la siguiente definición:

Diremos que una columna de la matriz de un resolvente propio principal, $R_h(\delta)$, (regular, o singular), es una *columna esencial* de dicho resolvente, si todos los elementos de tal columna, que corresponden a las eventuales ecuaciones homogéneas de $R_h(\delta)$, tienen signos opuestos al signo de su determinante principal δ. En caso

[1] Véase E. Borel: *Leçons sur les Séries Divergentes*, 2ª edición, pág. 152. Gauthiers-Villars. París 1928.

contrario se dirá que la *columna no es esencial.* En cuanto a los signos de los otros elementos de la columna no interesan.

En consecuencia:

I) *Toda columna de un* $R_h(\delta)$ *propio principal regular, es esencial,* puesto que carece de ecuaciones homogéneas.

De (4, *a, b*) resulta también inmediatamente que

II) *La condición necesaria y suficiente para que un sistema subordinado de orden* $h-1$, *relativo a otras tantas variables auxiliares paramétricas de un* $R_h(\delta)$ *principal, sea compatible es: o bien que* $R_h(\delta)$ *sea impropio, o bien, si* $R_h(\delta)$ *es propio, que la restante variable paramétrica corresponda a una columna esencial de* $R_h(\delta)$.

III) *Ningún* $R_h(\delta)$ *propio principal singular de un* $S_h(m, n)$ *irreducible, puede tener menos de dos y más de* $h-1$ *columnas esenciales.*

Para los casos $h = 1$ y $h = 2$, de sistemas respectivamente unitarios y binarios, el teorema carece de sentido, porque sus resolventes son, (14) y (15), regulares. Para $h > 2$, el teorema es consecuencia inmediata de (9, I, III).

En particular para $h = 3$, resulta:

IV) *En todo* $R_3(\delta)$ *propio principal singular de un sistema* $S_3(m, n)$, *ternario irreducible, hay dos y, solamente dos, columnas esenciales.*

V) *Si* $R_h(\delta)$ *es un resolvente principal de un sistema* $S_h(m, n)$, *no unitario, existen, por lo menos, dos sistemas subordinados compatibles de orden* $h-1$ *del sistema, pertenecientes a* $R_h(\delta)$ *que tienen cada uno,* $h-1$ *filas comunes con* δ.

Basta referirse a la definición (7) de resolvente impropio o propio. En el primer caso la proposición es evidente. En el segundo resulta también inmediatamente de [7.1] y de (III). Para $h = 2$, también es cierta (15, I) y (I).

Se puede precisar más el teorema precedente observando, [6.1], que si $R_h(\delta)$ es un resolvente propio principal, todos los determinantes de orden h que tienen $h-1$ filas prefijadas de δ, pertenecen a una misma columna de $R_h(\delta)$, la cual (II), es esencial o no, según que dichas $h-1$ filas correspondan a un sistema subordinado compatible de orden $h-1$ o a uno incompatible. Luego

VI) *Si* δ *es un determinante principal de un* $R_h(\delta)$ *propio, todos los demás determinantes principales del sistema que tienen* $h-1$ *filas comunes con* δ *y que corresponden a sistemas subordinados compatibles de orden* $h-1$, *pertenecen a alguna columna esencial de* $R_h(\delta)$.

Recíprocamente

VII) *Si δ' es un determinante principal de un sistema y este δ' tiene $h-1$ filas comunes con un δ de un $R_h(\delta)$ propio principal, correspondientes a un sistema subordinado compatible de orden $h-1$, δ' pertenece a una columna esencial de $R_h(\delta)$.*

Por lo pronto δ' pertenece a alguna columna de $R_h(\delta)$, [6.1]. Esta columna es necesariamente esencial, de lo contrario, (II), el mencionado sistema subordinado de orden $h-1$, relativo a otras tantas filas comunes a δ y a δ' no sería compatible.

Así, pues, la investigación de los sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$ pertenecientes a un $R_h(\delta)$ propio principal, relativos a todos los grupos posibles $h-1$ filas de δ, queda, por estos dos últimos teoremas, limitada, a las columnas esenciales de $R_h(\delta)$.

17. **Sistemas subordinados de orden h - 1 compatibles finitos e infinitos.** — Estudiemos, ahora, las relaciones de finitud e infinitud de los sistemas subordinados de orden $h-1$ compatibles, con el sistema al cual pertenecen.

I) *Todos los sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$ de un $S_h(m,n)$ que tiene un solo resolvente principal, son infinitos*, pues todos ellos tienen, (11, I), característica complementaria $h' = h-(h-1) = 1$, es decir, son unitarios y poseen un solo resolvente principal, (10, II), que es el del sistema; en consecuencia, (14, II) y, (12, IX), son infinitos.

II) *En un sistema $S_h(m, n)$ finito, son finitos todos los sistemas compatibles subordinados de orden $h-1$ y* recíprocamente, *si todos éstos son finitos, el sistema es finito.*

Como la proposición directa, está contenida en la (12, V) ya probada, bastará demostrar la recíproca. Por lo pronto, notemos que, en virtud de (I), el sistema debe tener resolventes propios. Pero (12, IV), no puede ser totalmente singular. Luego, (9, IV), toda variable paramétrica de un resolvente principal suyo corresponde a un polinomio principal. Si el sistema no fuese finito, existiría alguna variable auxiliar, X_j, no acotada. Si el sistema dado es unitario el teorema es cierto por definición. Si el sistema no es unitario, consideremos un resolvente principal, $R_h(\delta)$, cuyo determinante, δ, contenga a la fila j, y a $h-1$ filas correspondientes a $h-1$ polinomios principales que corresponden a un sistema subordinado compatible de orden $h-1$. Este determinante existe, de lo contrario, (9, IV), la inecuación correspondiente a la fila j sería sobrante,

lo que no es posible porque el sistema se supone irreducible. Anulando en este resolvente principal las otras $h-1$ variables auxiliares paramétricas, resultaría un sistema subordinado compatible infinito de orden $h-1$, contra lo supuesto.

III) *Si δ es un determinante principal de un $S_h(m,n)$ y todos los sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$ pertenecientes al $R_h(\delta)$ correspondiente son infinitos, el sistema se reduce, o bien a las únicas inecuaciones relativas a las filas de δ, o a un sistema totalmente singular.*

Si el sistema considerado es unitario, (14, II), el teorema es inmediato. Si no es unitario, consideremos, en el resolvente principal, $R_h(\delta)$, [7.1], separadamente, las ecuaciones no homogéneas:

$$\delta X_{h+1} + \alpha_{rh} X_h + \ldots + \alpha_{rj} X_j + \ldots + \alpha_{r1} X_1 = \Delta_r \neq 0$$

y las eventuales ecuaciones homogéneas que puede tener:

$$\delta X_{h+s} + \alpha_{sh} X_h + \ldots + \alpha_{sj} X_j + \ldots + \alpha_{s1} X_1 = \Delta_s = 0 .$$

a) Si en estas últimas los coeficientes α_{sj}, no nulos, tienen, todos ellos, signos opuestos al de δ, las correspondientes inecuaciones X_{h+s} son, (9, I), sobrantes en el sistema. Suprimidas todas, queda un resolvente regular, (7). En este caso, los sistemas subordinados de orden $h-1$, pertenecientes a $R_h(\delta)$ son todos, (9, VI), compatibles; sus resolventes, principales, deducidos del $R_h(\delta)$, anulando en él $h-1$ variables auxiliares paramétricas, son de la forma

$$\delta X_{h+r} + \alpha_{rj} X_j = \Delta_r \neq 0 .$$

Por ser además, sistemas unitarios infinitos, tienen, (14, II), un solo resolvente principal cuyo determinante, δ, es común a todos. Por ésto, en las ecuaciones análogas a la precedente, se debe tener $Sg.\ \alpha_{rj} = -Sg.\ \delta$, para los α_{rj} no nulos, de lo contrario, las variables auxiliares X_{h+r} y X_j estarían acotadas y no todos los mencionados sistemas, serían, (12), infinitos, contra lo supuesto. Es claro que no interesan los α_{rj} nulos, si los hay. Por lo tanto, (9, I), también las inecuaciones correspondientes a las variables auxiliares X_{h+r} son sobrantes y el sistema se reduce a las únicas h inecuaciones que corresponden a las filas del determinante principal δ.

b) Supongamos, ahora, que en las ecuaciones homogéneas de $R_h(\delta)$ haya algún determinante, α_{sj}, de igual signo que δ. El resolvente

principal se compondrá de ecuaciones no homogéneas y de ecuaciones homogéneas. Para todos aquellos sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$ pertenecientes a $R_h\,(\delta)$, vale el razonamiento del caso precedente y resultan los correspondientes coeficientes α_{rj} de signo opuesto al de δ. Pero, en este caso no se agotan todos, porque siendo $R_h(\delta)$, singular, hay sistemas subordinados de orden $h-1$ pertenecientes a él que no son compatibles, como resulta inmediatamente de la forma de un resolvente, [7.1].

Consideremos todos estos sistemas no compatibles, con lo cual agotaremos los coeficientes α_{rj}. Sea uno cualquiera de ellos el que resulta de hacer, en $R_h\,(\delta)$

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_p = 0 \quad , \quad X_q > 0\,,$$

correspondientes a inecuaciones principales del sistema. El resolvente que se obtiene es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\, X_{h+r} + \alpha_{rq}\, X_q = \Delta_r \neq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta\, X_{h+s} + \alpha_{sq}\, X_q = \Delta_s = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{array}\right. \qquad [16.1]$$

siendo, por hipótesis, para algún α_{sq} de estas ecuaciones

$$Sg.\ \alpha_{sq} = Sg.\ \delta\,, \qquad [16.2]$$

porque para aquéllos en que sea, para todo α_{sq}, no nulo,

$$Sg.\ \alpha_{sq} = -\,Sg.\ \delta\,,$$

el correspondiente sistema subordinado de orden $h-1$ sería compatible, (4, V) y, éste no es el caso.

Las relaciones [16.1], con las hipótesis [16.2], expresan que ningún cero común a los $h-1$ polinomios de X_1, X_2, ..., X_p, satisface a la inecuación correspondiente a la variable X_q.

Consideremos, ahora, un cero de un polinomio de cualquier X_{h+r}, común a todos los $h-1$ polinomios mencionados, el cual existe porque la matriz de este sistema parcial de h inecuaciones tiene, precisamente, el determinante δ, de orden h, no nulo. Este cero de X_{h+r} tampoco satisface, naturalmente, a la inecuación de X_q, por ser también

un cero común a $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Por lo tanto, en la primera ecuación, [16.1], debe ser necesariamente

$$Sg.\ \alpha_{rq} = -\ Sg.\ \delta \qquad [16.3]$$

para todos los α_{rq} no nulos, porque, en caso de ser

$$\alpha_{rq} = 0$$

el teorema está demostrado.

Repitiendo este mismo razonamiento para todos los sistemas subordinados de orden $h-1$ no compatibles pertenecientes a $R_h(\delta)$, resultan relaciones de la forma [16.3]. Lo cual prueba que todos los coeficientes α_{rj} de las ecuaciones no homogéneas de $R_h(\delta)$, tienen signos opuestos al de δ.

Luego, las inecuaciones de todas las variables X_{h+r} en $S_h(m, n)$, (10, I), son sobrantes. El teorema está, pues, demostrado.

Resultan, inmediatamente, los corolarios siguientes:

IV) *Todo $S_h(m,n)$ compatible, con resolvente propio, no reducible a un sistema totalmente singular, tiene, por lo menos, un sistema subordinado de orden $h-1$ compatible finito y admite, por lo tanto, otro resolvente principal,* porque todo sistema subordinado de orden $h-1$ tiene (11, I) característica complementaria $h'=h-(h-1)=1$, es pues unitario y, como es finito, (III), tiene, (14, II), dos resolventes principales que pertenecen, (10), a los del sistema.

V) Si $R_h(\delta)$ es un resolvente propio principal de un sistema $S_h(m, n)$ no unitario, y no reducible a otro totalmente singular, entre los determinantes α_{rj} distintos de δ, que forman los coeficientes de sus columnas esenciales, existe otro determinante principal δ' del sistema, que tiene, por lo tanto, $h-1$ filas comunes con δ.

Si no existiese en $R_h(\delta)$, ningún otro determinante principal del sistema, todos sus sistemas subordinados de orden $h-1$ compatibles serían infinitos por tener, (14, II), un único resolvente principal, lo cual contradice al teorema precedente, (IV). Hay, pues, entre los α_{rj} de $R_h(\delta)$, distintos de δ, algún determinante δ', que es principal de algún sistema finito subordinado compatible de orden $h-1$ de $R_h(\delta)$ y, por lo tanto, (10, IV), δ' es también determinante principal del sistema. En virtud de (16, VII), δ' pertenece a una columna esencial de $R_h(\delta)$. Esta propiedad puede expresarse también así:

VI) *Si un sistema no unitario, $S_h(m,n)$, admite más de un determinante principal, a cada uno de éstos, corresponde otro también principal, que tiene $h-1$ filas comunes con aquél.*

VII) *En una misma columna esencial de la matriz de un resolvente propio principal, $R_h(\delta)$, de un sistema, no puede haber más de otro determinante principal del sistema.*

En efecto, si hubiera dos determinantes principales, el sistema subordinado de orden $h-1$, perteneciente a $R_h(\delta)$ que resulta de anular los $h-1$ polinomios principales, excepto el de la columna considerada, en $R_h(\delta)$, siendo de característica complementaria $h'=h-(h-1)=1$, es decir, sistema unitario, tendría (10, IV), tres resolventes principales y, por lo tanto, tres determinantes principales, lo cual no es posible, (14, I).

VIII) *Ningún sistema, $S_h(m, n)$, $(h>1)$, puede tener más de dos determinantes principales con $h-1$ filas comunes iguales.*

Supongamos que en un sistema se tuviesen, efectivamente, tres determinantes principales con $h-1$ filas comunes iguales y sean

$$\delta \equiv (123\ldots(h-1)\,i) \quad ; \quad \delta' \equiv (123\ldots(h-1)\,j) \quad ; \quad \delta'' \equiv (123\ldots(h-1)\,k).$$

La matriz del resolvente principal, $R_h(\delta')$ del sistema, tendría, [7.1], en su misma, columna j, los determinantes δ y δ'', principales, lo cual es absurdo, (VII).

IX) *Si $R_h(\delta)$ es un resolvente propio principal, regular, de un sistema $S_h(m, n)$ finito, en cada columna de $R_h(\delta)$, distinta de la primera, existe otro y solamente otro determinante principal del sistema.*

En efecto, todos los sistemas subordinados de orden $h-1$ pertenecientes a $R_h(\delta)$ son compatibles, porque es regular y son finitos, (12, V), por ser finito el sistema; luego, existe, en cada columna de $R_h(\delta)$, otro determinante principal del sistema y, en virtud de (VII), existe uno solo.

En consecuencia, conjuntamente con δ, existen, en este caso, otros h determinantes principales del sistema, puesto que $R_h(\delta)$, consta de $h+1$ columnas contando la primera, la cual, tiene, a su vez, el determinante principal δ.

En resumen:

X) *A todo determinante principal, δ, que forma un $R_h(\delta)$ propio regular de un sistema no unitario finito, corresponden h determinantes principales del sistema que tienen $h-1$ filas comunes con él.*

(Continuará)

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Por C. C. D.

Fascículos editados por Hermann & Cía., de la colección « Actualités Scientifiques et Industrielles »; 16½ × 25½. Número de páginas y precios variables. París.

Nº 273. — Minz (B.), *La Secrétion de l'Adrénaline. Son mécanisme neuro-humoral.* 50 páginas. Precio: 12 francos. 1935.

Fascículo VI de la serie « Exposés de Physiologie », dirigida por André Mayer, profesor en el « Collège de France » y miembro de la Academia de Medicina de París.

El autor expone los problemas de la adrenalino-secreción en base a los trabajos más recientes sobre ese tema. Después de un análisis de los fenómenos que se agrupan más o menos en torno del mecanismo nervioso, pasa revista a los problemas de la adrenalino-génesis y sus relaciones con las glándulas suprarenales y otros órganos de secreción interna; y encara luego las acciones de algunas substancias muy activas, formadas por los tejidos, sobre el funcionamiento de la medularia suprarenal. Expone, por último, la importancia que tienen esos fenómenos para la concepción funcional del sistema nervioso autónomo.

Al final vienen las conclusiones o sea la expresión de la idea que de los resultados de las observaciones resumidas en la exposición hecha cabe formarse relativamente al mecanismo adrenalino-secretorio de la suprarenal, su rol fisiológico y su papel en el sistema nervioso autónomo.

Termina una muy larga bibliografía del tema.

Nº 274. — Bouligand (Georges), *Les Définitions Modernes de la Dimension.* 46 páginas. Precio: 12 francos. 1935.

Fascículo V de la serie « Exposés d'Analyse Générale », dirigida por Maurice Fréchet.

El conocido profesor de Poitiers, autor del mismo, da en él con su acostumbrada maestría la idea general de los puntos de vista modernos tan variados relativos a la noción de número de dimensiones.

En un aviso al lector, Bouligand dice « que las nociones que hormiguean actualmente en torno de la idea de *dimensión* y cuya importancia, por lo

menos en algunas, está ligada con teorías analíticas de capital importancia (teoría de las funciones, teoría del potencial) son particularmente instructivas para quien busca hacer el punto sobre las tendencias modernas de las matemáticas ».

Empieza por tratar las definiciones modernas de la dimensión. Primera categoría: el tipo de dimensión; Las nociones de la segunda categoría y las de tercera categoría.

Nº 276. — LALANDE (ANDRÉ), *Les Thermostats pour les Températures moyennes.* 54 páginas con 16 figuras. Precio: 15 francos. 1935.

Fascículo VIII de la serie « Exposés de Chimie Générale et Minérale », dirigida por P. Pascal.

El autor, doctor en ciencias físicas, examina, en primer lugar y desde un punto de vista general, apoyándose en resultados de la experiencia, el funcionamiento del termóstato y las vinculaciones entre los diversos órganos. Aplica, luego, esos datos a la realización de las mejores condiciones del reglado, estableciendo gráficos que permiten la predeterminación de los elementos de un termóstato simple. Por último, trae algunas indicaciones sobre los procedimientos llamados a obtener muy altas precisiones y esboza el reglado de las temperaturas de las cámaras y estufas.

En una introducción hace presente que entre los parámetros que determinan los equilibrios físicoquímicos o el curso de las reacciones químicas, muy pocos hay que sean susceptibles de ser fijados con buena precisión; y los que tal condición reunen, han, naturalmente, sido materia de estudios; entre ellos está la temperatura. Las disposiciones más simples son clásicas, pero su estudio sistemático no ha sido materia de muchas memorias. Por eso, el autor, que ha construído termóstatos de diversos modelos, ha creído de utilidad utilizar sus resultados personales para escribir el trabajo que nos ocupa.

Nº 277. — GAUSE (G. F.), *Vérifications Expérimentales de la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie.* 64 páginas, varias figuras. Precio: 18 francos. 1935.

Fascículo IX de la serie más arriba referida, dirigida por G. Teissier.

El autor pertenece al Instituto Zoológico y Comité Biofísico de la Universidad de Moscú. En este folleto expone algunas verificaciones experimentales de la teoría matemática de la lucha por la vida. Las experiencias en cuestión tienen por principal objetivo obtener una base capaz de hacer comprender la naturaleza exacta de la acción numérica recíproca que se produce de generación en generación entre diversas especies de animales que viven juntos. En lenguaje matemático, equivale ésto a ocuparse de las propiedades cualitativas de las integrales de ciertas ecuaciones diferenciales de la lucha por la vida que afecta las asociaciones. El autor recuerda los estudios matemáticos realizados sobre el particular por los profesores Volterra y Lotka.

Trata, primero, el caso de disputa en pos de la misma nutrición, de parte de especies idénticas; luego el de especies distintas; luego aquel en que dos

especies se alimentan la una de la otra. Finalmente la evolución de las asociaciones biológicas. Al final la bibliografía.

Nº 278. — Fleury (Pierre), *Leçons de Métrologie Générale et Appliquée.* Fascículo II. Mesures Géométriques. 112 páginas, 94 figuras, 4 láminas fuera del texto. Precio: 20 francos. 1935.

En esta segunda parte del trabajo del profesor de la Facultad de Lila, se expone lo relativo a las medidas de longitudes, sus principios; instrumentos de contraste, calibres y tolerancias; instrumentos de medidas de longitudes, micrómetros, comparadores; Goniometría; Medidas relativas a las áreas y a los volúmenes; aforadores y contadores de flúidos.

Nº 279. — Julien (M.) & Rocard (Y.), *La Stabilité de Route des Locomotives* (2ª parte). 76 páginas; 20 figuras. Precio: 15 francos. 1935.

Es el fascículo IV de la serie « Théories Mécaniques, (Hydrodynamique et Acoustique)», dirigida por Y. Rocard.

Trae un estudio profundo del seudo-resbalamiento escrito por el ingeniero de minas Julien; y dos notas del doctor en ciencias Rocard en las que se desarrollan puntos importantes. Una se refiere al movimiento de una locomotora sobre vía irregular, y en ella se expone un método matemático bastante nuevo basado en un estudio previo del movimiento de la máquina motivado por un defecto brusco; otra se refiere al movimiento de una locomotora en curva en un caso que, lo mismo teórica que experimentalmente, ha sido reconocido como siendo verdaderamente crítico para la estabilidad de las máquinas pesadas, largas y de ensambladuras anchas.

Nº 280. — Massé (Pierre), *Hydrodynamique Fluviale. Régimes variables.* 90 páginas con algunas figuras. Precio: 18 francos. 1935.

Es el fascículo V de la serie recién mencionada dirigida por el Dr. Rocard.

En una Introducción el autor resume todo aquello que es necesario para conocer la teoría de las ondas de translación y la de las crecidas tal cual fueron ellas construídas por Boussinesq, Graeff y Boulanger.

En un 1er. capítulo se establece la ecuación de las intumecencias aplicable a las ligeras desviaciones en torno al régimen uniforme, así como también el examen de las propiedades inmediatas de esa ecuación.

El 2º capítulo está destinado a la solución del problema « mixto » fundamental en el que se da la intumecencia producida en la cabeza de un canal ilimitado aguas abajo, supuesto de régimen uniforme al iniciarse el tiempo.

El tercer capítulo se ocupa del estudio de las condiciones en los límites, cuando las condiciones son más complejas.

El cuarto se refiere a aplicaciones numéricas varias y al contralor de la teoría en ciertos casos.

El quinto trata la cuestión de las perturbaciones de gran amplitud en las que la acción retardadora de los frotamientos es combatida por la influencia aceleradora del aumento de profundidad.

Una bibliografía termina el trabajo.

Nº 282. — Lelu (Paule), *Les Parentés chimiques des Etres Vivants.* 48 páginas. Precio: 10 francos. 1935.

Fascículo VII de la serie « Exposés de Physiologie » dirigida por André Mayer, profesor en el « Collège de France ». La autora es Preparadora en la « Escuela de Altos Estudios » (Instituto de Fisiología general de la Facultad de Ciencias de Estrasburgo).

Después de una Introducción explicativa, se exponen en la primera parte del folleto, con todos los detalles necesarios, los trabajos iniciados respecto de la repartición del fosfageno; cuestión ésta que ha dado lugar a un estudio sistemático; y se esfuerza la autora en despejar el alcance de tales investigaciones.

En la segunda parte, expone lo que, a la luz de algunos trabajos realizados, podrá ser, en sus grandes líneas, una clasificación bioquímica de los seres. Comprueba cuan pobres son los resultados obtenidos hasta la fecha. Esto abre a los investigadores un amplio y atractivo campo de estudios. Al final una bibliografía del tema.

Nº 285. — Mukherji (A. C.), *Étude Statistique de la Fécondité Matrimoniale.* 80 páginas. Precio: 16 francos. 1935.

Fascículo 1º de la serie « Statistique et Applications » dirigida por Michel Huber, director de los estudios de Estadística de la Universidad de París; y de la Estadística general de Francia.

El autor es estadista diplomado de la Universidad de París y profesor de Matemáticas en el Instituto de Baroda (India).

El profesor Huber, en un prefacio, recuerda los orígenes de la Estadística, los trabajos de Quetelet, de Galton, de Karl Pearson, Charlier, etc.

Expresa que la medida de la fecundidad ha dado motivo a numerosos trabajos desde 50 años atrás. Gini, recientemente, ha puesto en evidencia que la curva de fecundidad legítima, en base a la edad, tomaba una actitud de constante decrecimiento; esa comprobación estaba basada en observaciones relativas a un cierto número de familias inscritas en el Gotha. El autor Mukherji ha encarado un caso mucho más extenso o sea, la fecundidad de las mujeres en Francia desde 1820 hasta 1931; los resultados confirman los de Gini: la fecundidad matrimonial no pasa por un máximo sino que constantemente decrece con la edad. Después de un capítulo en que se exponen los principios del método seguido, se hace el cálculo de la fecundidad matrimonial relativo a Francia: deceso de mujeres casadas entre 15 y 49 años; deceso de los maridos; las mujeres divorciadas; partos; el período total de exposición en el riesgo de parto y el cálculo de la relación de la fecundidad. Un último capítulo trata de los cálculos de los coeficientes.

Nº 288. — Lacape (R. S.), *A la Recherche du Temps Vécu.* 60 páginas. Precio: 12 francos. 1935.

Fascículo VIII de la serie « Exposés de Physiologie », dirigida por André Mayer.

El autor se esfuerza en aclarar el distingo, a su juicio no bien definido aún, entre el tiempo mecánico y el tiempo vivido; este último es el único

que, a su entender, tiene un carácter más fundamental que cualquier otro.

En una *Introducción* relativa al papel que desempeña el símbolo *t* (del tiempo) y su significado en la fisiología experimental, el autor se explaya sobre esa particularidad del tiempo vivido. Entrando luego en materia, hace comparaciones y busca relaciones entre el tiempo mecánico y el vivido; trata la cuestión de los relojes físicos y los fisiológicos y del reloj de radio. La última parte del folleto se refiere a los tiempos fisiológicos y psicológicos: espacio vivido o fisiológico, tiempo vivido y tiempo vivido relativo.

Unas conclusiones y un cuadro relativo a los matices sucesivos del espacio y del tiempo vivido terminan el folleto. Sus últimas palabras son: « lo que importa a la vida no es, verosímilmente, ni la velocidad ni la aceleración de la Tierra, ni la duración de su revolución, ni aun su masa, sino las formas de energías radiantes concentradas en nosotros y sobre nosotros desde todos los puntos del universo ».

Nº 295. 296. — Prenant (M.), *Leçons de Zoologie. Protozoaires.* 2 fascículos de 80 y 58 páginas. Precio: 15 y 12 francos, respectivamente. 1935.

El primer fascículo trata los infusorios ciliados; el segundo los flagelados.

Hemos mencionado, anteriormente, otro fascículo de estas lecciones del profesor de la Sorbona; aquél trataba los Anélidos.

La parte relativa a los infusorios ciliados trae 76 figuras en el texto; el otro 68. Ambos terminan con una lista de los principales trabajos a consultar.

Los infusorios ciliados forman, entre los protozoarios, un ramal muy evolucionado y muy caracterizado por la complejidad de su organización y especialmente de su aparato nucleal. Después de haber unido otrora flagelados con ciliados, con el nombre genérico de *Infusorios,* hay tendencia hoy en separarlos profundamente. El aparato complejo de los ciliados los separa y opone a los flagelados de núcleo simple. Al final del segundo fascículo, el autor trae varias consideraciones sobre el particular.

Al comenzar el estudio, hace el profesor Prenant una delimitación de los protozoarios, animales que, como es sabido, son los más simples: mientras todos los otros o sea los *Metazoarios* están constituídos durante casi toda su vida por numerosas células unidas entre ellas formando órganos que tienen vida común, los protozoarios están constituídos por una sola célula; y en vez de órganos, sus diferenciaciones morfológicas son *organitos* salidos de la misma célula. Pero hay aclaraciones que hacer y de ellas se ocupa el autor antes de entrar en materia.

Nº 298. — Sutra (R.), *Contribution à l'Étude de la Constitution de l'Amidon.* 64 páginas. Precio: 15 francos. 1935.

Fascículo X de la serie « Théories Chimiques », dirigida por G. Urbain.

Uno de los objetos de este trabajo es precisar los numerosos vocablos empleados en la química del almidón, pues a menudo ocurre que una misma palabra es atribuída a substancias distintas y palabras diversas designan

productos del mismo tipo. Sabido es que el almidón es uno de los productos del reino vegetal más difundidos, pero, dice el autor, no hay una química propiamente dicha del almidón sino una química de sus productos de degradación, y por eso es natural que se discuta la homogeneidad o la heterogeneidad química del almidón.

Después de una Introducción explicativa, el autor, en un primer capítulo, se esfuerza en precisar su opinión sobre la amilopectina y la amilosa como supuestos constituyentes del almidón. Un segundo capítulo trata de la acción del anhidrido acético sobre el almidón natural en presencia de una proporción variable de ácido sulfúrico (acetólisis). Luego viene el estudio de la degradación del almidón bajo varios agentes. Después, un ensayo sobre la constitución de la parte glucídica del almidón. En un último capítulo se reunen los hechos experimentales conocidos relativos a la degradación del almidón y las experiencias propias del autor.

Terminan un resumen y una bibliografía.

Nº 299. — Beloussoff (W.), *Les Problèmes de la Géologie et de la Géochimie de l'Hélium.* 38 páginas. Precio: 10 francos. 1935.

Fascículo II de la serie « Exposés de Géologie » dirigida por L. Cayeux, miembre del Instituto y del Colegio de Francia.

El autor pertenece a la « Oficina de los Gases Naturales » de Leningrado. Después de recalcar que de todos los elementos constitutivos de la corteza terrestre explotados por el hombre, el helio es quizá el más singular y, a veces, el más enigmático en lo tocante a su génesis y distribución en dicha corteza, hace el autor un histórico del caso y manifiesta que su objeto es aclarar ciertas particularidades geológicas poco estudiadas relativas al gas en cuestión. Y se esfuerza en llamar la atención sobre el mismo. Procura poner a la vista que el helio, merced a su naturaleza especial, está dotado de un poder electivo tan alto hacia el medio geológico, que puede corrientemente servir como uno de los más interesantes indicadores del régimen estructural y geoquímico de la porción de la corteza terrestre que se encara. Al final una bibilografía.

La versión del ruso ha sido hecha por G. Bokhanovsky.

Nº 300. — Dantchakoff (Véra), *Déterminisme et Réalisation dans le Devenir du Sexe.* 80 páginas, con algunas figuras. Precio: 18 francos. 1935.

Es el fascículo V de la serie « Exposés de Biologie. La Cellule germinale dans l'Ontogénèse et l'Évolution » dirigida por la autora, profesora de la Facultad de Medicina de Kaunas (Lituania) y ex profesora de la Universidad de Colombia (Nueva York).

Las tesis principales contenidas en este fascículo han sido presentadas por la autora en una serie de conferencias dadas por ella en la Sorbona.

Después de un Prefacio ilustrativo, se desarrolla el tema en varios capítulos que tratan sucesivamente del Dimorfismo de los gametas y su determinismo. Algunas consideraciones sobre el establecimiento del gonocorismo. Diversas modalidades en la realización del sexo y principios fundamentales en esta realización. Termina observando que « el Sexo es el

producto de una ecuación cuyos eslabones, específicos y universales unos, plásticos otros, exigen, para su realización, la constancia estricta de un encadenamiento de factores, extrínsicos y exteriores. El estudio de las correlaciones individuales, en la base de dicha ecuación, realizado en correlación con la genética, nos permitirá sin duda, algún día, adueñarnos de su realización ».

Termina una bibliografía, casi toda de trabajos de la autora.

Nº 302. — Favard (J.), *Les Théorèmes de le Moyenne pour les Polynômes.* 52 páginas. Precio: 15 francos. 1936.

Fascículo I de la serie « Exposés de la Théorie des Fonctions » dirigida por Paul Montel, profesor de la Facultad de Ciencias de París.

El autor es profesor en la Facultad de Ciencias de Grenoble. En una Introducción observa que las proposiciones conocidas con los nombres de Teoremas de la media en el Cálculo Integral, o de Teorema de Rolle, en el diferencial, tienen carácter definitivo: el resultado cualitativo que expresan no puede ser mejorado cuando uno se coloca en todo el campo funcional dentro del que esas proporciones son aplicables. Precisiones a dichos enunciados solo caben, si se restringe ese campo. Habla luego de esta restricción y de las investigaciones que ha dado lugar y cuyo origen, en el campo complejo, es el teorema de Grace relativo al lugar de un cero de la derivada de un polinomio que toma dos valores iguales en dos puntos dados.

Favard expone en este folleto lo que a él le parece ser más esencial en los resultados hasta ahora alcanzados.

El cap. I trata el dominio complejo: resultados cualitativos, teorema fundamental, aplicaciones, recíproco del teorema de Rolle.

El cap. II se refiere al dominio real. Aquí dominan las investigaciones de Montel.

Termina una bibliografía del punto tratado.

Nº 303. — Hatt (Pierre), *Les Mouvements Morphologénétiques dans le Développement des Vertébrés.* 60 páginas con 12 figuras. Precio: 12 francos. 1935.

Fascículo V de la serie « Exposés de Biologie (Embryologie et Histogenèse)» dirigida por E. Faure-Frémiet, profesor en el Colegio de Francia. El autor es asistente en dicho Colegio.

En una Introducción, se manifiesta que, mientras los huevos tienen una organización variable según los grupos, los diversos vertebrados alcanzan en un momento dado de su desarrollo un estado embrionario tal que, considerado en las grandes líneas de su organización, resulta común a toda la ramificación. El rasgo dominante en ese embriôn es la existencia de un complejo axial de ese conjunto de bocetos con corte transversal característico que se extiende a lo largo de la región dorsal, tubo nervioso, etc.

Después de una primera modificación provocada por la fecundación y cuya naturaleza e importancia son aún mal conocidas, el huevo es transformado por la segmentación, en un embrión celularizado pero aun relativamente homogéneo. Después, ese embrión prematuro da nacimiento al embrión organizado típico mencionado más arriba. Ese período funda-

mental de la morfogénesis es al mismo tiempo un período de mucho movimiento.

En recientes investigaciones, la aplicación a diversos grupos de vertebrados, de nuevas técnicas, ha hecho conocer mucho mejor que antes la naturaleza e importancia de esos movimientos, y el autor se propone en este folleto estudiar los movimientos morfogenéticos en dos ejemplos apropiados: el embrión de Bactracio (Urodeles) y el embrión de Pájaro (pollo). Viene luego una comparación entre la primera morfogénesis de los Pájaros y Bactracios.

Y al final un Resumen de Bibliografía.

Nº 306. — MANDELBROJT (S.), *Séries lacunaires*. 40 páginas. Precio: 12 francos. 1936.

Es el fascículo II de la serie recién mencionada dirigida por Montel. El autor es profesor en la Facultad de Ciencias de Clermont-Ferrand, y, en una Introducción, recuerda la teoría de Weierstrass, los trabajos de Hadamard, el caso de las series de Taylor lagunares, la serie de Dirichlet, los trabajos de Montel, de Bloch, de Julia.

Entrando luego en materia, encara, el teorema de Hadamard, las generalizaciones relativas a las series de Dirichlet, los teoremas generales sobre estas series, el teorema de Ostrowski. Pasa después a la influencia de la densidad de los exponentes sobre la distribución de los puntos singulares, el teorema de Pólya, el de V. Bernstein sobre el eje de holomorfía y el del mismo, generalizando el de Pólya. Viene, a continuación, el estudio de la influencia de las lagunas sobre la naturaleza de las singularidades; teoremas de Mandelbrojt, de Jungen, de Pólya; series lagunares que admiten como singularidades, contínuos no limitados.

Termina una exposición relativa a la influencia de la naturaleza aritmética de los exponentes sobre la distribución de las singularidades; y una bibliografía.

Nº 307. OKKELS (HARALD), *Les Parathyroïdes*. 28 páginas, 5 figuras y láminas en el texto y fuera de él. Precio: 10 francos. 1935.

Fascículo I de la serie « Histophysiologie » dirigida por A. Policard, profesor de la Facultad de Medicina de Lyon. El autor es profesor adjunto de la Facultad de Medicina de Copenhague.

« El término *Histofisiología*, aunque nuevo, se aplica a una ciencia muy antigua nacida del deseo de comprender los mecanismos del funcionamiento de los tejidos, de los humores, de las células; cosas todas que constituyen las materias primas de los organismos cuya anatomía microscópica había revelado una muy compleja estructura ». Así se expresa el doctor Policard en el prefacio de este folleto. Agrega que puede definirse esa ciencia diciendo que es la de « los mecanismos de los tejidos y de las células ».

El autor trata sucesivamente la morfología, bioquímica, fisiología y patología de los paratiroides. Luego habla de las preparaciones que encierran el parathormona y su « estandardización ». Un resumen y un índice bibliográfico terminan el folleto. Las láminas traen una figura fotográfica de un adenoma paratiroide que ha provocado una osteitis fibrosa; radiogra-

fías de un antebrazo afectado por una osteitis fibrosa; de una osteitis fibrosa experimental en una rata y de una calcificación al nivel del riñón en una rata con una osteitis fibrosa experimental.

Nº 309. Quintin (M.), *Activité et Interaction ionique.* (Première partre). 36 páginas. Precio: 8 francos. 1935.

Fascículo II de la serie « Exposés d'Electrochimie Théorique », dirigida por René Audubert.

En este folleto, después de una Introducción, se desarrolla lo relativo a la noción de actividad; a la teoría de Debye y de Hückel, y los desarrollos de tal teoría.

La Conclusión es que « la concentración, a partir de aquella en que deja de ser aplicable la teoría, es amenudo muy débil. A pesar de que la validez de los cálculos de Debye y Hückel ha sido puesto en duda, en el dominio de las soluciones diluídas, ese método es el primero que ha conducido con éxito a la determinación capital del potencial en un punto de una solución y que ninguna mejora fundamental se ha aportado.

Termina una bibliografía del tema.

Nº 312, 313, 336, 337, 345 y 346. — Boutry (G. A.), *Les Phénomènes Photoélectriques e leurs applications.* 6 folletos de 100, 56, 84, 52, 52, 72 páginas con figuras. Precios: 20, 15, 20, 15, 15, 15 francos, respectivamente. 1936.

Estos seis folletos pertenecen a la serie « Optique & Radiations », publicada con la dirección de Ch. Fabry.

La obra en conjunto trae el desarrollo de tres conferencias dadas en la Sorbona en mayo 1935. El primer folleto trata los fenómenos fotoemisivos. Precede un prefacio de Fabry que transcribimos:

« El capítulo de la Física que trata la acción de las radiaciones sobre los fenómenos eléctricos y las propiedades eléctricas de los cuerpos, mucho se ha enriquecido en los últimos tiempos. Esos fenómenos *fotoeléctricos* — dando a este vocablo un significado general, — ofrecen uno de los más interesantes aspectos de ese vasto conjunto que comprende las relaciones entre la materia y la radiación; por eso mismo, su importancia teórica es muy grande. Y llegó ya la hora de las aplicaciones, algunas de las cuales han vulgarizado el nombre un tanto vago de « célula fotoeléctrica ». Tal es el conjunto que Boutry ha querido exponer en una serie de monografías, encarándolo desde el triple punto de vista experimental, teórico y práctico. Constituyen un tratado completo de los fenómenos foto-eléctricos y de sus aplicaciones ».

Este primer fascículo trata el efecto fotoeléctrico normal, y luego, el efecto selectivo.

El segundo fascículo se ocupa de las « células fotoemisivas »: fabricación de las células; propiedades generales; célula de atmósfera gaseosa.

El tercero se refiere a la fotoconductibilidad: cristales idio y alocromáticos; semiconductores; líquidos.

El cuarto versa sobre las diferencias de potencial fotoeléctrico; entre dos puntos de un volumen iluminado; en el contacto de un electrodo y de

un cuerpo fotoconductor; en las cadenas de conductores conteniendo electrólitos.

Los dos últimos tratan, respectivamente, la medida de las corrientes, de los flujos en fotometría fotoeléctrica: características eléctricas en los diversos tipos de células; medida directa de la corriente fotoeléctrica; aplicaciones.

Al final una tabla general de materias.

Cada capítulo trae una bibliografía comentada.

N° 314. — AUGER (DANIEL), *Comparaison entre la Rythmicité des Courants d'Action cellulaires chez la Végétaux et chez les Animaux.* 102 páginas, 82 figuras y 12 láminas fuera del texto. Precio: 20 francos.

En una Introducción el autor, doctor en ciencias, suministra algunas informaciones sobre ciertos fenómenos fisiológicos cuyo conocimiento general es necesario para comprender los fenómenos rítmicos. Expone luego las características del material empleado y los métodos para registrar la corriente actora. Trata, después, los fenómenos rítmicos en los *chara*. El cap. 4 se ocupa de la evolución general de los fenómenos rítmicos en los tejidos animales; y de los provocados en idénticas condiciones que en los *chara* y, además, de la introducción de una onda suplementaria en un sistema rítmico, Pulsaciones rítmicas provocadas por la corriente constante. Interpretación de los ritmos. Estudio de la polarización y de otros fenómenos, comprobadas.

En una *Conclusión* resume las analogías notadas entre las pulsaciones de los tejidos animales y las de los vegetales: Malgrado la diversidad de los ritmos y la variedad de origen de las células en las que se los observa, los sistemas pulsantes revelan una gran unidad en su comportamiento.

Al final, una Bibliografía.

N° 325. — CHEVALLEY (CLAUDE), *L'Arithmétique dans les Algèbres de Matrices.* 36 páginas. Precio: 10 francos. 1936.

Fascículo XIV de la serie « Exposés Mathématiques », publicada en homenaje a la memoria de Jacques Herbrand.

Después de una Introducción, se exponen sucesivamente los siguientes temas: Estructura de los módulos regulares. Los automorfismos de éstos. Introducción a una aritmética regular en las matrices. Representación de los órdenes « máxima ». Teoría de las clases de ideales. Caso conmutativo. Relaciones con la aritmética de un cuerpo conmutativo máximo.

En un primer apéndice se demuestra un teorema relativo a un cuerpo cualquiera, conmutativo o no, en el que se supone definida una aritmética regular de orden máximo dado. Otro apéndice trata la teoría de los divisores elementales.

Terminan el folleto unas referencias bibliográficas.

SECCION OFICIAL

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SECCION "SANTA FE"

CONMEMORACION DEL CENTENARIO DE AMPÈRE

Con motivo de conmemorarse el centenario del fallecimiento del sabio Ampère el Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral invitó al presidente de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé), Ing. Francisco E. Urondo, a pronunciar ante el micrófono de L. T. 10 Radio del Instituto Social de la Universidad una disertación alusiva a la vida y obra del célebre físico. Dicha disertación se llevó a cabo el 19 de junio y en ella el Ing. Urondo se refirió a la personalidad de Ampère, resumiendo la importancia de sus trabajos científicos y filosóficos y destacando las características personales del sabio.

Ciclo de Conferencias

HERENCIA MENDELIANA

Prosiguiendo con el ciclo de conferencias organizado por la Sección « Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina que se iniciara el año próximo pasado, tuvo lugar el 23 de Julio, en el salón de actos de la Facultad de Química, una conferencia a cargo del Ing. Antonio E. Marino, quien disertó sobre el tema: « Herencia mendeliana », que desarrolló de acuerdo al siguiente sumario: Herencia y variación. Teorías pre-mendelianas. Mecanismo de las divisiones celulares. Leyes de Mendel. Casos de mono- y di-hibridismo.

Gene y carácter. Ligamiento. Determinación del sexo. Interacción factorial. Recombinaciones.

El conferenciante se refirió en primer término a los tipos de variaciones, hereditarias y no-hereditarias, a la influencia que el medio ejerce sobre la expresión final de los caracteres hereditarios de los individuos, para poner en evidencia que lo que se hereda es una tendencia específica a reaccionar de manera determinada a los estímulos del medio.

La herencia y la variación son dos fenómenos que coexisten universalmente en todos los seres vivos y de su interacción resultan las semejanzas y desemejanzas entre los individuos emparentados biológicamente.

Se refiere después a la no-herencia de las variaciones producidas por el medio y a los esfuerzos de los investigadores teóricos para dilucidar el mecanismo de la herencia biológica, haciendo una ligera mención de la teoría de Weissmann.

Contemporáneamente a esos, una serie de hibridadores, desde Korlreuter a Mendel, realizan pacientes trabajos de observación en las descendencias de los híbridos, cuyas conclusiones constituyen aportes concretos a la dilucidación del problema de la herencia.

El descubrimiento de las leyes de la herencia que llevan el nombre de Mendel, fué el resultado del alto grado de perfeccionamiento a que llevó ese investigador la técnica experimental y de la eliminación del concepto organicista de individuo que guiaba a sus antecesores.

Sus experiencias tienen la estructura lógica de la investigación científica, haciéndose notar que el mendelismo es hoy día considerado como una evidente demostración de la posibilidad de encarar el estudio de los fenómenos biológicos con los mismos procedimientos que utilizan el químico y el físico al tratar su materia, citándose conceptos de Hogben y Horovitz al respecto.

Se refiere a las divisiones celulares, mitosis y meiosis, a los cromosomas como portadores del material hereditario, y a las diferencias entre los concepto de gene y carácter, exponiendo finalmente las leyes de Mendel sobre la segregación y recombinación independiente de los factores en las gametas y a los principios de dominancia y recesividad y de uniformidad de la primera generación híbrida.

Citó varios casos de mono- y di-hibrismo en plantas y animales, de herencia ligada al sexo, herencia del sexo, proporciones atípicas, etc., ilustrando los ejemplos con proyecciones luminosas.

La conferencia, a la que asistió numeroso público, se realizó bajo

los auspicios del Instituto Social de la Universidad N. del Litoral y fué propalada por radio por intermedio de la estación L. T. 10 Radio del Instituto Social de la Universidad N. del Litoral.

CONFERENCIA DEL REV. P. JOSE A. LABURU

El 8 de Agosto, a las 10.30, en el salón de actos de la Facultad de Química Industrial y Agrícola, tuvo lugar una conferencia, organizada por la Sección « Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina, conjuntamente con la Facultad de Química, que estuvo a cargo del Rev. P. José A. Laburu S. J., quien disertó sobre el tema: « Problemas sobre la psico-fisiología del carácter ».

Esa conferencia, a la que asistió numerosísimo público, se realizó bajo los auspicios del Instituto Social de la Universidad y se propaló por radio, por intermedio de la radiodifusora L. T. 10 Radio del Instituto Social de la Universidad N. del Litoral.

LA PRIMERA CRISIS MUNDIAL DE POST-GUERRA Y SU REPERCUSION EN LA PROVINCIA DE SANTA FE

El martes 18 de Agosto se realizó otra de las conferencias organizadas por la « Sección Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina. Esta conferencia estuvo a cargo del Director General de Estadística de la provincia de Santa Fé, Cont. Púb. Emilio Sánchez R. quien se refirió a « La primera crisis mundial de post-guerra y su repercusión en la provincia de Santa Fé ».

La conferencia se realizó en el salón de actos de la Facultad de Química Industrial y Agrícola y se desarrolló de acuerdo al siguiente sumario:

1º Caracteres fundamentales que distinguen la crisis de superproducción industrial y agraria mundial que estalló en 1929.

2º Misión de los econometristas.

3º Quebrantos comerciales y civiles en la República Argentina (último decenio).

4º Quebrantos comerciales y civiles en la provincia de Santa Fé, a través de números índices agrupados, porcentajes y gráficas (1926-1935). Fundamento de la pauperización de capas intermedias. Estudio de rubros que agrupan algunas actividades principales de la producción y distribución de mercancías.

5º Comparación de la crisis anormal mundial de post-guerra con otras cíclicas anteriores. Aplicación metodológica (período 1906-1935): líneas tréneas.

La disertación, que fué escuchada por numeroso público, fué ilustrada con proyecciones luminosas de gráficas y números índices y fué propalada por L. T. 10 Radio del Instituto Social de la Universidad N. del Litoral, que auspició dicho acto.

Sesión de comunicaciones científicas en homenaje a Ameghino

Como adhesión a los actos conmemorativos del 25º aniversario del fallecimiento de Florentino Ameghino, la Sección « Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina realizó el 7 de Agosto, en una de las aulas de la Facultad de Química de Santa Fé, una sesión especial de comunicaciones científicas, en la que intervino el socio honorario de la Sección Dr. Joaquín Frenguelli, Director del Instituto del Museo de la Universidad N. de La Plata, que se encontraba en esos días en la ciudad de Santa Fé en cumplimiento de una misión de intercambio universitario.

Antes de tratarse las comunicaciones científicas presentadas el socio Prof. Rolando Hereñú leyó las siguientes palabras alusivas al homenaje que se celebraba:

Estimados consocios:

Cumpliéronse ayer 25 años, desde aquel día aciago en que se extinguiera para siempre, en su vieja casona de La Plata, la vida del hombre cumbre de la ciencia argentina, cuya propia obra, escrita en más de 20.000 páginas, es el monumento más grande que pudiera erigirse en su memoria.

Venimos pues, con esta Sesión de comunicaciones, a rendir homenaje al sabio y a su obra; pálido homenaje tal vez comparado con la magnitud del hombre a quien va ofrendado; pero, el mayor que una sociedad científica puede tributar a quien consagró su vida a las ciencias, con entusiasmo, abnegación y desinterés no superados.

Vano intento sería pretender sintetizar su obra, vasta y compleja, en las pocas frases con que voy a distraer vuestra atención, por-

que tal obra, por su extensión y profundidad, escapa a mis posibilidades.

Por otra parte, muy poco podría decir, que no se hubiera dicho ya sobre tan brillante personalidad; pero, no puedo resistir a la tentación de evocarla, tal cual se nos aparece a través de sus escritos, de sus polémicas y de su vida ejemplar.

Jovial y afable, de una sencillez bonachona y simpática en su trato amistoso, pero violento y mordaz en la polémica, llevado por su vehemencia meridional; rebelde a todo dogmatismo y a toda imposición académica; audaz en sus construcciones geniales; de una fantasía creadora inagotable que lo arrastraba a tejer esas cadenas de hipótesis, tan desconcertantes, pero tan fecundas; de una tenacidad de acero en su constante batallar por ideales puros; sincero hasta parecer contradictorio a fuerza de rectificarse cada vez que se reconocía en error, en su noble afán de acercarse a la verdad; valiente y abnegado hasta el heroísmo, con ese valor y esa abnegación tan necesarios para todo aquel que orienta su vida por los ásperos caminos de la ciencia pura; y de un desinterés sin límites por los bienes materiales.

Tal vez muchas de sus hipótesis más audaces serían hoy indefendibles, tal vez muchas de sus teorías más queridas no fueron sino efímeras quimeras creadas por su fantasía; pero bien venidas esas hipótesis y esas quimeras, si ellas fueron los instrumentos con que llegó a construir ese enorme edificio de la Paleontología argentina, que es el basamento de su gloria universal, basamento granítico, que ha resistido victoriosamente las injurias del tiempo y de los hombres.

A continuación se presentaron las siguientes comunicaciones cuyos resúmenes publicamos:

DATOS ARQUEOLOGICOS SOBRE PARADEROS INDIGENAS DE SANTA FE

(ISLA DEL PERIQUILLO, HELVECIA Y SAUCE VIEJO)

Por AMELIA LARGUIA DE CROUZEILLES

He visto cumplida la finalidad que me propuse en mi comunicación de fecha 10 de Agosto de 1934, poner en conocimiento de los estudiosos y especializados, estos paraderos que constituyen páginas reveladoras, donde el arqueólogo puede reunir elementos para el estudio de la prehistoria, siempre renovado y atrayente.

La misión de estudio que enviara la Dirección del Museo Antropológico y Etnográfico de la Facultad de Filosofía y Letras de Buenos Aires, con motivo de mis comunicaciones — por las cuales tuvo conocimiento de la existencia de un rico yacimiento arqueológico en el Arroyo de Leyes — y que fuera integrada por los Sres.: Director del Departamento de Arqueología del Museo Etnográfico de la misma Facultad profesor Francisco de Aparicio, profesor Federico Daus y doctor Joaquín Frenguelli enviado por el Museo de La Plata, realizó visitas a este yacimiento y otros próximos a esta ciudad.

Los Sres. Wagner, en su obra sobre la « Civilización Chaco-Santiagueña y sus correlaciones con el Viejo y Nuevo Mundo », incluyen la fotografía de una urna globular encontrada en los terrenos del Arroyo Leyes (págs. 458-59, texto y nota 2º), comparándola con otras de Ilissarlik y de Santiago del Estero.

El Director de la Biblioteca del Departamento de Antropología del Museo Nacional de Lima, Perú, Sr. F. S. Hurtado, a quien se le remitió el folleto citado, con el objeto de hacer conocer la estilización del puma en estas regiones, encuentra de mucho interés el contenido de aquél.

Por otra parte, el Director de la Biblioteca Nacional Dr. Gustavo Martínez Zuviría, ha remitido varios ejemplares de este folleto a bibliotecas extranjeras. Se ha difundido así el conocimiento de esta región del litoral, que no había sido estudiada antes bajo el punto de vista arqueológico.

PARADERO DE LA ISLA PERIQUILLO

Encuéntrase la Isla Piriquillo, como lo indica el primer plano de la ciudad de Santa Fé, publicado en la historia de Cervera, en la

FIG. 1. — Parte del primer plano original de la ciudad de Santa Fé.

costa del Saladillo, departamento La Capital de esta provincia; al noreste del sitio denominado « Añapiré ». Esta isla, cuya configuración ha sufrido variaciones en el transcurso del tiempo por los desbordes frecuentes del Saladillo, contiene en sus playas alrededor de sus costas de poca inclinación, un rico yacimiento de alfarería indígena.

Entre ejemplares de artísticas representaciones zoomorfas en pastas de colores suaves y negras, con ricos dibujos y grabados se ha encontrado una pequeña cabecita antropomorfa que representa la « divinidad sin boca » ya definida por Wagner, en el primer tomo de su obra « Civilización Chaco-Santiagueña y sus correlaciones con el Viejo y Nuevo Mundo » (fig. 3).

A este respecto dice, en comunicaciones particulares: « La pequeña divinidad de la Isla Periquillo es un hermoso documento. El con-

Fig. 2. — A la izquierda Añapiré, derecha isla Periquillo.

junto de piezas que me ha comunicado indican claramente que los pueblos que dejaron estos restos de sus actividades y creencias eran servidores de la misma divinidad »...

Otra pieza de este sitio presenta caracteres semejantes a las del noroeste argentino, donde la aplicación de cabezas modeladas de aves y otros animales colocados como asas en las vasijas, es muy común. Parece ser un fragmento de plato o escudilla con la representación de una cabeza de pato (fig. 4). Es muy semejante a la

descripta por Boman en su obra « Arqueología de la región andina y del desierto de Atacama ».

Muy cerca de este lugar se encuentran concavidades circulares cuyas paredes calcinadas hacen suponer que han sido fogones; diseminados a su alrededor se ven restos de alfarería.

FIG. 3. — "Divinidad sin boca", isla Periquillo.

PARADERO « LOS UBAJAYS », HELVECIA

Situada al sur de la localidad de Helvecia, departamento Garay, encuéntrase el hermoso paraje « los Ubajays », así llamado por los árboles que abundan allí en una extensión de mil metros aproximadamente, entre el camino de la costa y un brazo del río San Javier. Efectuando excavaciones, es posible hallar aún restos de alfarería indígena, que presentan visibles manchas de tizne de humo, demos-

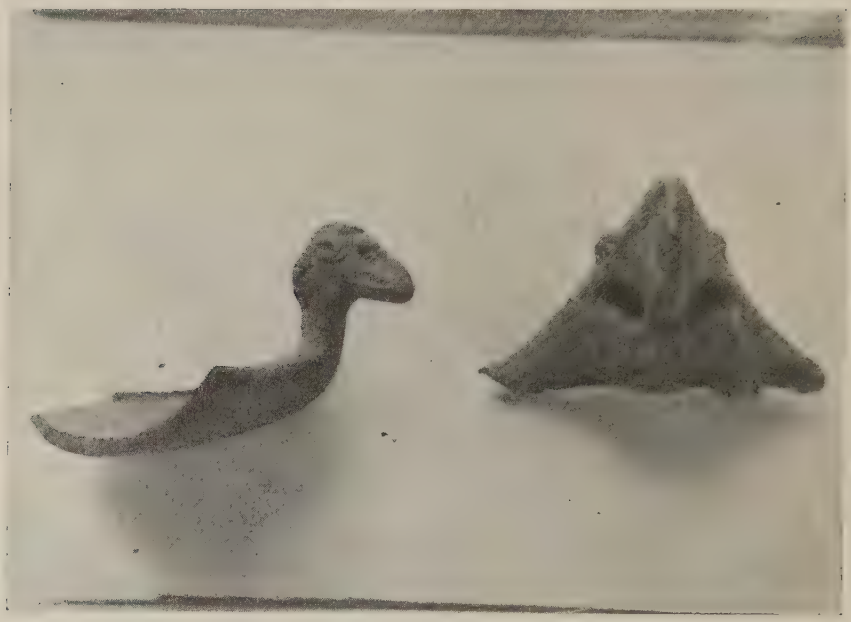


FIG. 4. — Ejemplares ornitomorfos, isla Periquillo.

FIG. 5. — Fragmentos de alfarería, isla Periquillo.

trando claramente el uso que fué dado a las piezas originales; entre éstos se observan algunos con decoraciones incisas y otros con franjas monocromas rojas.

El vaso de cerámica en color natural claro (fig. 7) decorado con triángulos rojos, fué hallado en el mismo paraje, junto a un esqueleto humano y conteniendo en su interior restos de maíz.

FIG. 6. — Los Ubajays, Helvecia.

PARADERO DE SAUCE VIEJO

Al sur de Santa Fé, en las inmediaciones del pueblo de Sauce Viejo, sobre la margen derecha del río Coronda, se encuentran esparcidos abundantes fragmentos de alfarería, evidentemente, algunos de ellos, coloreados con ocre, lo que demuestra la anterior existencia de un paradero indígena de características semejantes a los descubiertos en distintos puntos del mismo río.

Es común allí la alfarería gruesa y pequeños ejemplares de cerámica negra, con grabados notables por la perfección y seguridad de sus trazos (fig. 8).

Contemplando el aspecto geográfico y el conjunto arqueológico de los diversos paraderos descriptos, se encuentran en numerosos sitios, vestigios de vida aborigen, que comprueban la existencia continuada de manifestaciones artísticas locales dentro de una unidad

Fig. 7. — Vaso de cerámica decorado en rojo. Helvecia, Los Ubajays.

general, a la cual los arqueólogos atribuyen las mismas características en todo el litoral.

El Sr. Luis E. Valcarcel, Director del Museo Nacional de Lima, dice en sus « Cuadernos de arte antiguo del Perú » (Nº 1, pág. 4): « Cada pueblo, cada época, cada cultura, ha producido su propia obra inconfundible, peculiarísima. Un tipo le corresponde. Seriándolos, se observa su evolución y las ajenas influencias, así como se

fija su módulo. Hay por lo tanto una tipología, que sirve a los mismos fines de determinación cronológica ».

Es así como los documentos arqueológicos que se encuentran en los paraderos indígenas que me ocupan, conservan la tipología ge-

FIG. 8. — Fragmentos de cerámica, Sauce Viejo.

neral, evidencian el contacto con otras culturas lejanas y la coexistencia con otras civilizaciones.

Robustece la presunción de contacto de civilizaciones lejanas, el hallazgo hecho por mí en El Aromal, de una pequeña huaica en turquesa de igual forma y dimensión que la encontrada por el Dr. Frenguelli en el mismo sitio en años anteriores (1).

(1) Publicaciones del M. A. Etnográfico de la F. de Filosofía y Letras, Serie A, 11, Buenos Aires.

Similar a ellas, de dimensiones algo mayores, fué hallada otra a orillas del Arroyo de Leyes.

El ave andina y el vaso representado en la figura 9 son ejemplares que evidencian una concepción artística y técnica esmerada.

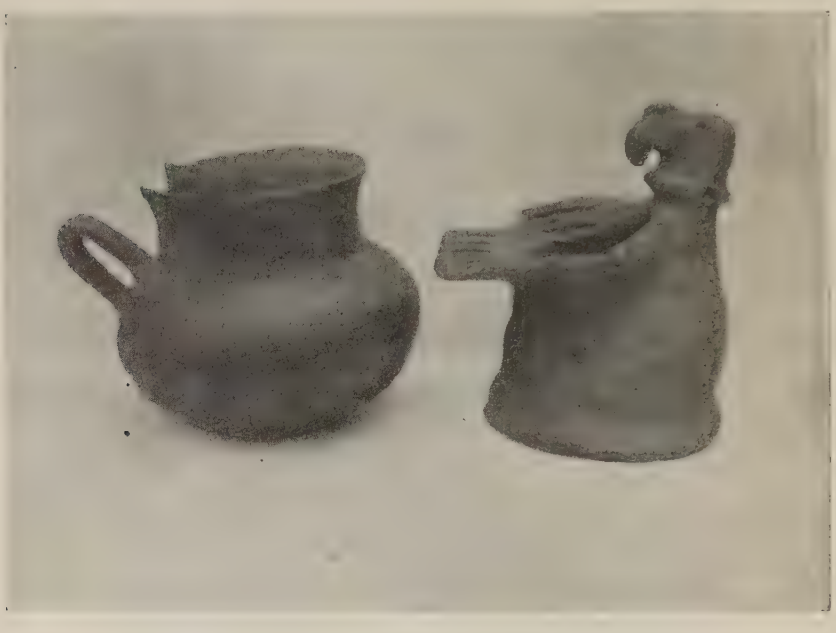


FIG. 9. — Ejemplares de cerámica roja y pardo oscura.

No serían extrañas a estas variadas manifestaciones de arte indígena, las migraciones de las que nos hablan extensamente los cronistas, y los historiadores contemporáneos dedicados a esta clase de investigaciones.

APUNTES ESTRATIGRAFICOS ACERCA DEL YACIMIENTO DEL "GLOSSOTHERIUM" DE LA LAGUNA GUADALUPE

Por JOAQUIN FRENGUELLI

Los restos fósiles del *Glossotherium lettsomi Owen,* que recientemente la Sección de Santa Fé de la Sociedad Científica Argentina enviara al Museo de La Plata, es interesante no sólo desde el punto de vista paleontológico sino también estratigráfico.

Su importancia paleontológica ya fué puntualizada por el Dr. Angel Cabrera en una nota publicada por el Museo de La Plata (*Las especies del género « Glossotherium »,* en *Notas del Museo de La Plata,* I, Paleontología nº 5, 193-206, Buenos Aires 1936).

Me concretaré, por lo tanto, a breves consideraciones acerca del valor estratigráfico de su yacimiento.

Como es sabido, los restos en cuestión proceden de las excavaciones en el lecho de la laguna de Guadalupe (más o menos en el punto donde arranca su breve emisario que la desagua al río Santa Fé) practicadas por el Ferrocarril de Santa Fé para fundar los pilares del nuevo puente de su ramal al puerto de Colastiné. Como es sabido, estas excavaciones hallaron una serie de capas arenosas, con inclusiones lenticulares de arena arcillosa verduzca, particularmente ricas en restos de mamíferos terrestres, moluscos fluviales y troncos de árboles.

Análogos sedimentos y análogos fósiles fueron hallados también en las excavaciones para la fundación del puente colgante del camino de Santa Fé a San José y por los dragados profundos efectuados en el río para el ensanche del puerto y para el relleno de la depresión ribereña a lo largo de la cual se ha construído la avenida Siete Jefes.

Tuve la oportunidad de examinar los materiales petrográficos y paleontológicos extraídos de todas las excavaciones mencionadas. Por lo que se refiere al puente del ferrocarril, los restos fósiles fueron llevados por obreros y curiosos y no llegaron a mis manos sino parcial y esporádicamente. Pero, por amable pedido del personal superior de la repartición correspondiente del F. C. S. F., tuve la oportunidad de reconstruir el perfil del substrato atravesado por las

diferentes perforaciones practicadas transversalmente al lecho de la laguna y profundizadas, como término medio, hasta unos 30 metros debajo del fondo del lecho mismo.

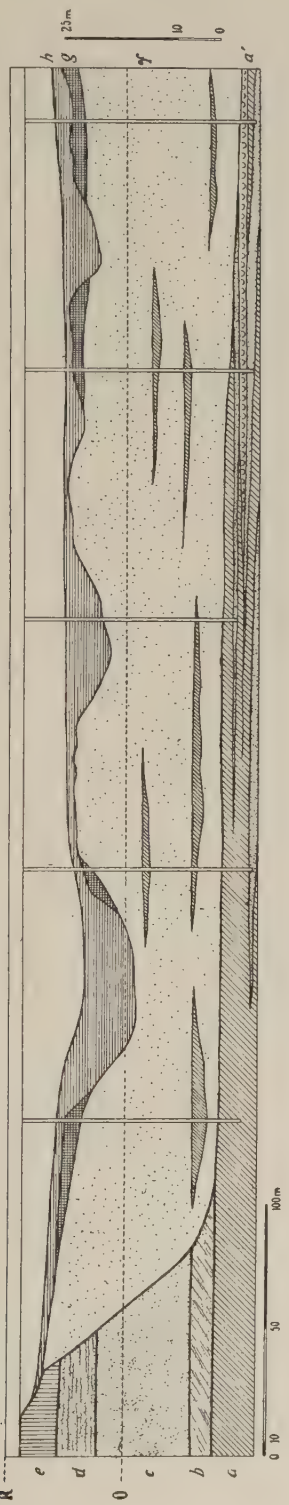
Como puede verse por el gráfico adjunto, la serie de capas arenosas fosilíferas forman el relleno sedimentario de un viejo álveo fluvial excavado en sedimentos más antiguos, correspondientes en parte a la serie terciaria que se descubre en el perfil de las altas barrancas entrerrianas próximas a la ciudad de Paraná y en parte a la serie cuaternaria, pampiana, que forma las pequeñas barrancas del borde occidental de la misma laguna y el suelo sobre el cual está construída la ciudad de Santa Fé.

Las capas más antiguas alcanzadas por las excavaciones forman el fondo del viejo cauce y corresponden a las capas arcillosas más altas del Paranense, con sus bancos terminales de moluscos marinos costeros (con predominio de aquella pequeña ostra que impropiamente fué determinada como *Ostrea parasitica* Gmel.), recubiertas, hacia los bordes del álveo, primero por arenas estuarianas del Mesopotamiense y luego por arenas medanosas del Entrerriense. En los bordes mismos, sobre estas arenas blancas o grisáceas siguen las arenas amarillas del Ríonegrense fluvial y, sobre éstas, la serie pampiana que, en parte, ya fué analizada por mí en otra oportunidad (*Hallazgos arqueológicos en la laguna de Guadalupe*, en *Public. Museo Antropológico y Etnográfico de la Fac. de Filosofía y Letras*, serie A, II, 57-67, Buenos Aires, 1932).

Esta serie, de la misma manera que en las barrancas de la próxima localidad de Santo Tomé, se compone en su mayor parte de limos loessoides del Pampiano medio (Ensenadense), recubiertos por el manto loéssico del Pampiano superior (Bonaerense) el cual localmente se recubre, en parte, de arenas de médanos y de un suelo arenoso negro (Aimarense) con restos de industrias indígenas prehispánicas.

Dentro del lecho fluvial, el relleno de las arenas fluviales fosilíferas está recubierto por capas de materiales cenagosos recientes, en gran parte destruídos por los torbellinos que se formaron alrededor de los pilares del viejo puente y cuyas excavacionees minaron estos pilares y determinaron la caída del puente mismo. Estas excavaciones fueron luego rellenadas por limo de sedimentación actual.

Es evidente, pues, que las arenas, donde se hallaron los restos del *Glossotherium*, colmaron un antiguo lecho cuya excavación no sólo es posterior al terciario paraniano-entrerriano, sino también posterior a la sedimentación de los horizontes pampianos (medio y superior) que integran sus bordes.


23m
0
h
g
f
a'
100m
50
10
0
R
e
d
0
c
b
a

Su excavación, por lo tanto, corresponde a esa fase de reactivación erosiva, general para amplias zonas de la región pampásica, que siguió a la sedimentación del loess bonaerense y que fué determinada por un levantamiento epirogénico, el mismo que determinó la regresión del estuario belgranense. También es evidente que luego su rellenamiento por aluviones fué determinado por la sucesiva fase de inversión en el movimiento, que, en su final, provocó el incremento querandinense del estuario del Río de la Plata.

Por lo tanto, los sedimentos fosilíferos en cuestión estratigráficamente corresponden al Lujanense de otros parajes de la región del Litoral, inclusive los de la localidad típica en el cauce del río Luján, próximo a la villa del mismo nombre.

En estos sedimentos, el hallazgo de restos de *Glossotherium* junto con restos de otros mamíferos típicos de la fauna pampiana superior (*Stegomastodon platensis* Amegh., *Equus curvidens* Orv., *Paraceros lujanensis* Amegh., *Megatherium americanum* Cuv., *Glyptodon reticulatus* Orv., *Doedicurus kokenianus* Amegh., *Toxodon platensis* Amegh., etc.) es un hecho interesante, pero normal.

Es en el Lujanense, en efecto, donde esta fauna adquirió su más avanzado gigantismo y su más típica expresión.

En las excavaciones de la laguna de Guadalupe y en las excavaciones de las localidades próximas en el cauce del río Santa Fé, los restos de esta fauna fueron hallados en abundancia particularmente en las lentes arcillosas entre 11 a 25 metros de profundidad debajo del fondo actual de la laguna, pero se hallaron también esparcidos en todos los niveles de su espesor.

En fin creo interesante agregar que estos sedimentos aluvionales donde se encontraron los restos del *Glossotherium* y de los demás mamíferos lujanenses ya mencionados, no son sedimentos propios de la laguna, sino del antiguo cauce del río Paraná en su extremo borde occidental.

Este borde aun hoy está marcado por las barrancas de la laguna de Guadalupe que se continúan con las barrancas de la margen derecha del río Santa Fe y, después de la interrupción del gran bañado del río Salado, con las barrancas de este río y de su continuación el río Coronda.

A esta serie de barrancas, que forman la orilla derecha del álveo del gran colector paranense, corresponden, en el lado opuesto, las barrancas entrerrianas, que constituyen su borde izquierdo.

El grandioso cauce, excavado al final del pampiano, como consecuencia del movimiento surreccional ya recordado, fué luego relle-

nado sucesivamente por los aluviones del Lujanense, del Platense y de los tiempos actuales. Estos últimos forman el vasto complejo insular que se extiende entre Santa Fé y Paraná y entre el cual las aguas del río se subdividen en numerosos brazos o estancan en lagunas y pantanos.

LA IDENTIDAD DEL YACAROL CON EL D-CITRONELOL

Por G. A. FESTER, F. A. BERTUZZI y D. PUCCI (1)

En nuestra publicación anterior (2) sobre la secreción almizclada de las glándulas del yacaré hemos expresado la convicción de que el alcohol denominado « yacarol » sea idéntico al 2-6-Dimetilo-hepteno-2-ol-7. Entretanto hemos comprobado que no existe tal identidad y por el otro lado, por una rectificación cuidadosa al vacío, hemos dividido el yacarol aparentemente homogéneo, en una muy pequeña porción de un alcohol de menor peso molecular y en una fracción grande de otro alcohol, cuya identidad con el d-citronelol ha sido irreprochablemente comprobada (punto de ebullición a distintas presiones, peso específico, índice de refracción, puntos de fusión de tres derivados cristalizados, análisis elemental, olor rosáceo; solamente el poder giratorio es algo mayor que el del citronelol

Sostenemos la hipótesis, expresada en el artículo anterior, de que el Yacarol derive de una descomposición de la colesterina en las glándulas.

(1) Comunicación presentada en la sesión del 7 de Agosto de 1936 de la Sociedad Científica Argentina, Sección « Santa Fé » y en las Sesiones Químicas el día 2 de Julio de 1936.

(2) *Anales*, Noviembre 1934, E. V, T. CXVIII, pág. 222 y sig.

LA QUIMICA DEL HELIO Y LA TRANSMUTACION DE LOS ELEMENTOS

Por H. DAMINOVICH

Ya hemos visto que Ramsay y su escuela basándose en el fenómeno de incandescencia y desprendimiento simultáneo de helio, nitrógeno, etc. (descubierto por él y Travers) que tiene lugar cuando se calienta a 500-600 grados la fergusonita (niobato de itrio) (1) fundan: 1) su hipótesis de la posible existencia de combinaciones

(1) Thomson observó algo análogo con un fluoruro de calcio y metales del grupo del cerio e itrio.

endotérmicas de helio; 2) su técnica para intentar la obtención de compuestos de helio sometiendo *todo el sistema* (elementos reaccionantes y resultado de la posible transformación) a elevadas temperaturas.

Pero nuestras experiencias han demostrado lo contrario, es decir, que la descomposición de los compuestos PtHe es endotérmica, puesto que aumenta con la elevación de temperatura y que la obtención de los mismos se consigue activando previamente los elementos (1) y luego condensando dichos productos a temperaturas superiores a su punto de descomposición.

Es conveniente por lo tanto averiguar si con los datos experimentales obtenidos es posible dar otra interpretación del fenómeno en cuestión.

A pesar de que en otra oportunidad hice el examen de las tentativas de Köhlschuter, conviene recordar lo esencial de las mismas. Este autor hizo notar que en los primeros tiempos la idea de nulivalencia o incapacidad de combinación de los gases « nobles » no era tan general como en la época en que publicó sus nuevas investigaciones (1905), estudió la formación y propiedades de los nitruros de uranio y de torio (que producían incandescencia y desprendían nitrógeno al ser calentados en presencia de oxidantes) y mostró que tenía muy pocas probabilidades la hipótesis por él emitida anteriormente (1899)de la existencia de un heliuro análogo a los nitruros naturales de las rocas más antiguas, que por la acción de un oxidante (óxido de hierro o de uranio) desprendería helio y desarrollaría calor (calor de oxidación del metal combinado al helio más que el calor de oxidación del Fe o Ur).

En vista de sus primeros trabajos y por corresponder a condiciones experimentales diferentes, opinaba que los resultados negativos de Ramsay no eran suficientemente convenientes. Pero según Perrier, el brillante descubrimiento de Ramsay de la formación de helio por el radio, dió un golpe mortal a esta hipótesis, tanto que Köhlschuter la abandonó adoptando la hipótesis de las soluciones sólidas.

Al comentar esto manifesté mi desacuerdo expresando que los hechos aludidos no están en contra de la posibilidad de una combinación.

(1) Proceso en el que como hemos visto además de la descarga eléctrica y de la superficie metálica, intervienen *temperaturas moderadas* pero según gran probabilidad, *temperaturas locales elevadísimas.*

Además, como Köhlschuter no había efectuado medidas térmicas, no se podía saber si la cantidad de calor desarrollada correspondía a un proceso de oxidación difícil de explicar por la estabilidad grande de los óxidos de hierro o uranio, o a otro proceso.

Por esto considero de interés relacionar el fenómeno en cuestión con el descubrimiento hecho por nosotros al calentar rápidamente el compuesto PtN, a saber, incadescencia y desprendimiento simultáneo de nitrógeno.

Desde el comienzo hice notar, en colaboración con Berraz, que este fenómeno es análogo al observado durante la calefacción de ciertos minerales que desprenden He y N (fergusonita) y como se produce también en el vacío descartamos la posibilidad de atribuirlo a la oxidación del nitrógeno liberado y nos inclinamos a la hipótesis de que el efecto térmico se debía a la combinación fuertemente exotérmica de los átomos de nitrógeno liberados (formación de la molécula N_2). Ya en las primeras experiencias realizadas con el calorímetro de Bunsen obtuvimos cifras del orden decimal previsto por esa hipótesis de 130.000 a 190.000 pequeñas calorías por mol. de N_2 concordantes con las determinaciones realizadas hasta el presente.

Si admitimos una constitución del compuesto PtN de la forma: NPt..... PtN y otra análoga para los nitruros o compuestos de otro tipo contenidos en los minerales, tendremos la explicación del fenómeno comentado. En efecto, estando el N en forma inestable y a la vez con el máximo de valencias débilmente ligadas (átomos de N no unidos entre sí en el compuesto) en la primera etapa de calefacción rápida del compuesto MN (M metal) de descomposición endotérmica, daría N atómico libre y en la segunda etapa los átomos de N se combinarían desarrollando gran cantidad de calor e incandescencia.

Si hacemos una mezcla de PtHe, BiHe, WHe, o PdHe, con PtN y calentamos rápidamente, reproducimos con este « mineral sintético » el fenómeno observado por Ramsay y Travers. La descomposición de los compuestos de He y N con los metales, sería endotérmica y el fenómeno de incandescencia no se debería a una descomposición exotérmica como lo suponían dichos investigadores sino a la formación exotérmica de la molécula N_2 a partir de los átomos liberados por calefacción del PtN.

Dado el interés del problema pensamos llevar a cabo investigaciones sistemáticas con diferentes minerales y con nituros y compuestos metálicos de He de distinta estabilidad para someter a una verificación definitiva estas conclusiones.

Como ya he tenido ocasión de hacer un examen de los trabajos realizados hasta 1926 respecto al importante problema del estado del helio y de los otros gases raros en la naturaleza, solo haré aquí algunas observaciones basadas en la obtención y comportamiento térmico de una serie de compuestos que se pueden considerar como « minerales sintéticos de gases raros ».

Recordaré solamente que la mayor parte de los investigadores han establecido de un modo demasiado absoluto el origen radioactivo de todo el helio de los minerales (Ramsay, Travers, Collie, Strutt, Vernardok, Beloussoff, etc.). Pero al lado de esos investigadores, otros han señalado la posibilidad de un origen no radioactivo (Gautier, Piuti, etc.).

Cuando no se admitían combinaciones químicas de ninguna clase entre el helio y los constituyentes de los minerales radioactivos y se llegaba a la conclusión categórica de que el helio era absolutamente inerte en cualquier condición, se aseguraba también que todo el helio de los minerales, provenía de la desintegración de los elementos radioactivos. Pero ahora que existen serias pruebas de lo contrario (es decir que el helio actúa químicamente con intensidad en ciertas condiciones) y que se ha demostrado que los compuestos PtHe, PdHe, BiHe, WHe, CuHe, son por así decirlo « minerales sintéticos de helio », más ricos en este elemento que los verdareros minerales (5, 10, 15, 25 y más cm^3 por gramo en tanto que la torianita solo llega a 9 cm^3) no es difícil aceptar que en la naturaleza puedan haber muchos productos no readioactivos (Be, etc.) con apreciable cantidad de helio eliminable por el calor, en forma análoga a la observada en los minerales radioactivos, en las sales de radio y en los compuestos PtHe.

Hecha esta introducción creo necesario entrar en algunos pormenores acerca del desarrollo de los estudios e investigaciones que he tenido la oportunidad de realizar hasta el presente y que aún continúan en forma sistemática.

Del examen que hicimos en otra oportunidad sobre las investigaciones relativas al contenido de helio en los minerales de uranio (Strutt) y a la eliminación del helio por el calor en los minerales radioactivos (Wood) y de las determinaciones que ha llevado a las relaciones:

$$\frac{He}{N_2 \text{ fuente}} = \frac{He}{N_2 \text{ aire}} \text{ (Moureau-Lepape)}$$

se obtienen los siguientes resultados: 1) existen divergencias grandes respecto al « valor normal » 10 que Strutt cree haber establecido (cm^3 de He por gramo de $U_3 O_8$), pues dicho valor oscila entre 0,146 (pechblenda de Joachimstal) 31,4 (crisolita del Llano Texas y 5600 (mineral de fluor de Groenlandia). Además ciertos minerales de berilo desprovistos de radioactividad contienen cantidades apreciables de helio (168 mm^3 por 100 gramos. 2) Son notables las discrepancias de las relaciones establecidas por Moureau-Lepape, pues en el caso del helio su valor numérico oscila mucho en tanto que para los otros gases raros alcanza con gran aproximación el valor normal que es igual a la unidad. Además la cantidad de helio obtenido en los grisú es muy superior al que corresponde a la radioactividad de la hulla. 3) La hipótesis de Wood de que parte del helio se halla en cavidades excesivamente pequeñas está en contra de lo observado por él mismo.

En resumen, lo expuesto está en contra de la hipótesis de que todo el helio de los minerales es de origen radioactivo y apoya la idea de que tanto el helio de origen radioactivo como el fijado en el mineral por otro proceso, puede hallarse al estado de combinación química común o de combinación química de adsorción o de superficie.

A la vez, en esa misma época (1926), hice notar que el problema en cuestión estaba en sus comienzos y que era indispensable someter a un fraccionamiento sistemático los principales minerales que contienen helio y argón y hacer el estudio de las características físicas y químicas de cada una de las fracciones aisladas y en particular el efecto de la temperatura sobre los heliuros o argonuros (compuestos de otra categoría) que podrían existir en dichas fracciones.

* * *

En la primera serie de experiencias pude establecer una analogía evidente entre el comportamiento térmico de los compuestos platino-helio, y de los minerales con helio (torianita, monacita, etc.). En efecto, tanto en uno como en otro caso el fenómeno es muy lento y de carácter endotérmico (aumento de la eliminación de helio con la temperatura) se producen « límites » a diferentes temperaturas y las últimas porciones de helio sólo se eliminan a muy altas temperaturas. También entreví la posibilidad de existencia de helio en los minerales y en las sales de radio y productos de desintegración en forma análoga a la observada en los compuestos PtHe, ya que las

ideas imprecisas de « oclusión » y de « solución sólida » no aclaraban nada respecto a la naturaleza del fenómeno, ni acerca de la clase de fuerzas que mantienen unidos dichos elementos o de la categoría de compuestos o complejos que pudieran formarse. Con el propósito de someter a una verificación estas ideas, emprendí nuevas series de experiencias sobre eliminación de helio en los compuestos PtHe y en las sales de radio con helio acumulado) a diferentes temperaturas y sobre radioactividad y helio en los minerales (caso de la autunita en colaboración con el profesor Urondo). Ya hemos visto los resultados relativos a la eliminación de helio a muy altas temperaturas en los compuestos PtHe, que confirman una de las previsiones anteriores respecto a la analogía con los minerales. En lo que se refiere a las sales de radio pude llegar a los siguientes resultados previa acumulación de parte del helio emitido por 22 mg. de Ra durante dos años: 1) Existe paralelismo entre la eliminación por el calor del He acumulado en las sales de Ra y sus derivados y la eliminación de He de los compuestos PtHe (aumento de gas desprendido cuando se eleva la temperatura, curvas análogas que muestran límites a diferentes temperaturas y necesidad de altas temperaturas para eliminar las últimas porciones de gas; 2) para extraer el helio de las sales de Ra, son necesarias calefacciones más intensas y prolongadas que las usadas hasta ahora por Dewar y otros investigadores.

Al mismo tiempo iniciamos investigaciones sobre helio y radioactividad en los cuerpos radioactivos (autunita, torianita, carnotita, pechblenda, etc.) y en algunas de sus fracciones (ganga, precipitados después de ataque químico, etc.) y pudimos comprobar en el caso de la autunita de acuerdo con Piuti que la ganga obtenida después del ataque con HCl, contenía cantidades apreciables de helio del orden de las halladas en la parte uránica. Continuamos en forma sistemática las investigaciones para llegar a una conclusión definitiva.

* * *

Todas estas experiencias que he realizado, me permiten formular con mucha probabilidad la hipótesis « *del origen común de compuestos de helio* »: *a*) en los minerales no radioactivos; *b*) en minerales radioactivos (combinación del helio activo de la atmósfera, del helio ionizado, etc.); *c*) en las sales de radio (combinación de helio ionizado, partículas); *d*) en los compuestos PtHe (combinación del helio y de los vapores de Pt activados durante la descarga eléctrica).

La hipótesis de la formación en los minerales de compuestos de helio a partir del helio eléctricamente activado, por procesos no radioactivos cuando la tierra se hallaba en el período de condensación tendría su apoyo también en las recientes investigaciones astro-físico-químicas (Campbell, Saha, Wright, Bowen Swings, etc.) que han demostrado la existencia de átomos de helio metaestable y ionizado en las estrellas de muy alta temperatura y en las nebulosas. En efecto, no hay dificultad a primera vista en admitir que los electrones y los fotones de alta frecuencia emanados del sol, activen el helio en presencia de los vapores metálicos a su vez activados (con producción de elevadísimas «temperaturas locales») y luego los compuestos formados en la zona de estabilidad propia se condensen arrastrados por las partículas de dichos vapores metálicos en vías de aglomeración.

Para el caso de fijación de pequeñas cantidades de helio bastará aceptar acciones análogas a las obtenidas con ciertos minerales en atmósfera de helio común («anormal» poco activo).

Las anomalías grandes observadas en las relaciones

$$\frac{He}{U} \text{ de Strutt y } \frac{He}{N_2 \text{ fuente}} = \frac{He}{N_2 \text{ aire}} \text{ (Moureau-Lepape)}$$

que no pueden explicarse partiendo solamente de los datos radioactivos, se interpretan fácilmente admitiendo que el valor grande de dichas relaciones se debe al helio no radioactivo que se desprende lentamente por la acción de la temperatura, determinados agentes químicos, etc., sobre las combinaciones químicas comunes o combinaciones químicas de adsorción que él forma con determinados constituyentes de los minerales.

Todo lo expuesto nos induce a realizar las siguientes series de experiencias: 1) obtención de compuestos de helio con elementos no radioactivos de la serie del berilo y con elementos radioactivos como el uranio, torio, radio, etc., con el fin de aumentar la fijación y eliminación del helio sin alterar la radioactividad (por lo menos la que da origen a los rayos alfa) y de averiguar si existen analogías con los compuestos platino-helio especialmente en cuanto a la descomposición térmica se refiere; 2) obtención de compuestos de helio por acción de las partículas alfa sobre platino y otros metales finamente divididos y averiguar si ellos son análogos a los obtenidos por el método de las descargas eléctricas.

* * *

En un trabajo anterior (1) tuve ocasión de examinar las investigaciones de Winchester, de Ramsay y sus colaboradores y de Thomson sobre eliminación de helio en tubos de descarga y de hacer notar el interés extraordinario de las mismas para todas las teorías que se habían formulado, tomando como base la presencia de pequeñísimas cantidades de helio y de neón en diferentes cuerpos y especialmente en los radioactivos. Luego agregaba que después de la duda emitida por Mme. Curie en el sentido de que el helio observado podía estar contenido en las sales que lo desprenden, duda que aumentaba por el hecho de que este desprendimiento de helio se agotaba para una sal dada, mientras que en el caso de una transformación atómica producida por los rayos catódicos debiera aumentar proporcionalmente al tiempo, Thomson no consideraba la cuestión del helio como definitivamente resuelta, pues se necesitaba todavía mucho trabajo experimental para decidir entre las diferentes fuentes posibles de este gas. Pensábamos que no sería imposible que en estos casos como en el de algunas sales radioactivas, se encontraran vestigios de heliuros metálicos capaces de poner helio en libertad por la acción de las radiaciones de estas sustancias y de los rayos catódicos.

Más tarde Thomson (2) adopta una hipótesis emitida anteriormente por Rutherford y Strutt y admite que en los casos mencionados las partículas alfa en lugar de ser proyectadas con las velocidades enormes que caracterizan las sustancias radioactivas, son emitidas con una energía tan débil, que no podrían escapar completamente de los átomos de los cuales provienen. En una palabra dichas partículas serían liberadas por un proceso análogo a los radioactivos y finalmente desunidas cuando el átomo sufre un violento bombardeo bajo la influencia de los rayos catódicos. Como sólo una pequeña fracción de átomos contendría el helio débilmente ligado, los rayos sólo separarían esta parte y el desprendimiento de helio cesaría.

Este mismo investigador sostenía que nadie podía aceptar esta hipótesis de transmutación atómica que plantea cuestiones de un

(1) « Inercia y actividad química de los gases raros. Estado actual del problema ». Conferencia dada en la Asociación Química Argentina, Octubre de 1926. Publicada en los *Anales* de la misma, 1926-1927.

(2) J. J. Thomson. Les rayons d'electricite positive p p 187, París 1923. Traducción por Fric y Corvisy, de la segunda edition inglesa, Agosto 1921.

carácter tan fundamental si no se probaba que era inadmisible cualquiera otra explicación. Como ella sería considerablemente reforzada si fuera posible evidenciar las partículas del átomo que quedan después de la eliminación del átomo de helio, él ensayó determinar la masa 3 en el caso del litio y la 5 en el caso del glucinio pero sin resultados decisivos, puesto que la primera la obtuvo también bombardeando sales que no contenían ni vestigios de litio y sólo consiguió excepcionalmente pequeñas cantidades de helio en las sales de berilio ensayadas.

Debido a que las diferentes sales de un mismo metal dan diferencias considerables y a que la velocidad de producción disminuye después de un bombardeo prolongado, Thomson pensaba que no era la masa total de la sal la originaria del helio desprendido sino « algo que se encontraba al estado de impureza accidental », pudiendo ser una fuente posible de dicho gas, la capa de aire condensado en la superficie de los sólidos. Pero agregaba que conocemos muy poco acerca de las capas gaseosas condensadas como para saber si ellas encierran o no la misma proporción de helio que el aire ordinario o para determinar si la proporción de gas condensado sobre la superficie depende de la composición química de las sales. Una observación en apoyo de dichas opiniones es que la velocidad de emisión del helio disminuye gradualmente si se prolonga el bombardeo de la sal mantenida en el vacío.

Fué en vista de esto que emprendí la serie de investigaciones que demostraron que admtiendo la existencia de combinaciones químicas del tipo PtHe, PdHe, FeHe, BiHe, etc., en los minerales de helio o en los productos de desintegración radioactiva, se explica perfectamente la eliminación de helio por calefacción o bombardeo catódico hasta el agotamiento (y no en cantidad proporcional al tiempo) sin necesidad de hacer intervenir en esos casos la hipótesis de la transmutación del átomo, muy aceptable teóricamente pero hasta ahora sin una prueba experimental definitiva y completamente satisfactoria en lo que se refiere a las llamadas transmutaciones artificiales experimentales o provocadas.

Esta manera de ver ha sido reforzada recientemente por las investigaciones de Paneth y G. Thomson (1) quienes han demostrado que la producción de helio de masa 3 durante el bombardeo de deutones por protones, se debe a la eliminación del helio previamente contenido en las paredes de vidrio del tubo de descarga.

(1) *Nature*, 136, pág. 334, 1936.

Todo lo cual me lleva a insistir con más empeño aún en la advertencia de que es imprescindible hacer pruebas en blanco con el fin de averiguar si la exigua cantidad de helio contenido en el elemento a transmutar o en alguna parte del aparato, influye en el resultado (cantidad, velocidad y recorrido de las partículas de helio simple y doblemente ionizadas). Mientras no se lleven a cabo estas pruebas fundamentales y las destinadas a evidenciar « los residuos atómicos » resultantes, quedará la duda acerca de muchas de las transmutaciones que en estos momentos se dan como seguras.

Para seguir contribuyendo a dilucidar este apasionante problema he emprendido una nueva serie de investigaciones con el fin de reforzar la interpretación química, de determinar la cantidad de gases (hidrógeno, helio, óxido de carbono, nitrógeno, oxígeno, etc.) en los metales (litio, boro, berilo, aluminio, plomo, uranio, torio, platino, cobre, etc. y de estudiar el efecto de la eliminación de estos gases (agotamiento por efecto de una prolongada e intensa calefacción o bombardeo iónico o electrónico previos) sobre los fenómenos eléctricos que puedan producirse al someter a la acción de las descargas eléctricas moderadas o intensas a dichos metales.

* * *

Refiriéndose a este trabajo, el Ing. Urondo observa que las conclusiones a que llega al Dr. Damianovich son justificadas y por ello las experiencias probatorias de que el helio que aparece en las transmutaciones se deba solo a la disgregación nuclear y no tenga otro origen, deben ser concluyentes.

Las transmutaciones logradas en estos últimos años por el bombardeo con partículas alfa, con protones, deutones, neutrones y fotones, como así también las atribuídas a la radiación cósmica, tienen una base teórica y experimental delicada. Por ello la realización de pruebas testigos como las que indica el autor son de conveniencia indiscutible. No obstante no puede restarse importancia a los trabajos experimentales y teóricos que van profundizando el conocimiento de la constitución de la materia y estableciendo esquemas de posibles transmutaciones.

Excursión a las barrancas de Paraná

El Dr. Joaquín Frenguelli, socio honorario de la Sección « Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina y Director del Instituto del Museo de la Universidad N. de La Plata, visitó en los primeros días de Agosto la ciudad de Santa Fé, enviado especialmente por la Universidad platense en misión de intercambio universitario, con el objeto de dictar en la Facultad de Química de esta ciudad un cursillo breve sobre geología del litoral. Ese cursillo estuvo constituído por dos clases teóricas que se dictaron el 4 y 6 de Agosto y una clase práctica que tuvo lugar en las barrancas de la vecina ciudad de Paraná.

Dado el interés del asunto, la Sección « Santa Fé » invitó a sus asociados a asistir a esa clase práctica, que se realizó el sábado 8 de Agosto por la tarde y a la que concurrieron numerosos estudiantes y profesores de la Facultad.

SINGULARIDADES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE UNA Y DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS INDEPENDIENTES

Por CARLOS BIGGERI

Introduccion

El presente trabajo consta de dos partes. — La primera parte se refiere a las singularidades de las funciones analíticas de una variable definidas por integrales determinantes (ordinarias o generalizadas) situadas sobre la recta de convergencia y a las singularidades de las funciones analíticas definidas por series potenciales situadas sobre la circunferencia de convergencia.

Las singularidades de las funciones analíticas definidas por *series potenciales* han sido objeto de numerosos trabajos, de los cuales un excelente resumen, así como una extensa bibliografía (de más de 70 autores), puede verse en « Les singularités des fonctions analytiques représentées par une série de Taylor » (S. Mandelbrojt, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascículo LIV, París, 1932). Pero el estudio directo de las singularidades de las funciones analíticas definidas por *integrales determinantes* aún no ha sido abordado sistemáticamente. Creemos digno de interés, relacionar las singularidades (que pueden no existir) pertenecientes a la recta de convergencia de una integral determinante, de la función analítica que dicha integral define, con la función generatriz de tal integral.

Existe una notable diferencia entre la teoría de los puntos singulares de las funciones analíticas definidas por series potenciales y la de los puntos singulares de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes, basta recordar la clásica propiedad: sobre la recta de convergencia condicional de una integral determinante,

puede no existir ningún punto singular de la función definida por dicha integral.(*)

En cambio, la necesidad de la existencia de un punto singular periférico para una función analítica definida por una serie potencial constituye, en realidad, la definición misma de punto singular.

Se comprende entonces, que el estudio de las singularidades periféricas (o no) para las funciones definidas por integrales determinantes implica dificultades que no se presentan en el estudio de las singularidades periféricas (o no) para las funciones definidas por series potenciales.

(*) Esta propiedad se justifica muy sencillamente del siguiente modo: llamemos r a la recta de convergencia condicional de la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

Todos los puntos de r pueden ser regulares para $f(z)$ porque entonces, si bien, a cada uno de estos puntos le corresponde un entorno (que podemos tomar circular) en el cual es $f(z)$ función regular; como el conjunto de todos estos puntos de r no está acotado, y por lo tanto no se le puede aplicar el teorema de Borel (es decir, el límite inferior de la sucesión de los radios de estos entornos es *cero*, si las ordenadas de sus centros crecen infinitamente), no existe un semiplano que contenga al de convergencia simple de la integral:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

en cuyos puntos todos sea regular la función $f(z)$.

En cambio, la aplicación de esta consideración a una serie simple potencial conduce a la fundamental propiedad: Sobre la circunferencia de convergencia de una serie de potencias, existe necesariamente un punto singular de la función analítica definida por dicha serie.

Esto es: entre otras, una razón intrínseca de la diferencia desde el punto de vista de las singularidades, existente entre las series potenciales y las integrales determinantes estriba en la siguiente propiedad elemental: la circunferencia es un conjunto (de puntos) acotado y cerrado, mientras que la recta no es conjunto acotado.

Ahora bien, si se supone que el punto en el infinito del plano: $z = x + iy$, es regular para la función $f(z)$, entonces sí, que se puede asegurar, según es sabido, que: sobre la recta de convergencia condicional de la integral:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-|t z} \cdot dt$$

existe necesariamente un punto singular para $f(z)$. La demostración de esta importante propiedad se puede hacer aplicando las consideraciones anteriores.

Conocida es la idea de «*correlación*» entre la teoría de las series y la de las integrales impropias (numéricas y funcionales): existen teoremas de series tales que, convenientemente transformados, dichos teoremas tienen sentido y son válidos para las integrales impropias, y viceversa (a veces, el *correlativo* de un teorema para las series o para las integrales no se deduce directamente, sino que es menester emplear ciertos artificios). Innumerables son los ejemplos de este paralelismo.(*) Pero la *correlación* no es perfecta: existen teoremas para las series (integrales) que no tienen su correlativo para las integrales (series). Por ejemplo: 1.°). El término general de una serie convergente tiende a cero, pero la función sub-integral de una integral impropia convergente puede no tender a cero (más aún, el límite superior de la función sub-integral de una integral impropia convergente, puede ser infinito). En cambio, si la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} f(x) \, . \, dx$$

es convergente, se verifica que:

$$\lim_{p \to \infty} \int_p^{p+q} f(x) \, . \, dx = 0$$

siendo q un número positivo fijo arbitrariamente tomado. Luego, lo correlativo del término general de una serie simple en la integral:

$$\int_0^{\infty} f(x) \, . \, dx \, ,$$

no es $f(x)$, sino:

$$\int_p^{p+q} f(x) \, . \, dx \, .$$

2.°). Sea el teorema de Fabry («Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analityque dans les cas très généraux », Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3.e série, t.

(*) Véase nuestro trabajo: «Varios criterios para integrales simples y algunos teoremas sobre integrales dobles» (Revista Matemática Hispano-Americana, Julio 1932).

XIII, 1896): « dada la serie potencial $f(z) = \Sigma a_n z^n$, si existe límite de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ y es:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \alpha$$

el punto $z = \alpha$, es *singular* para $f(z)$. » Este elegante teorema, *así enunciado, no tiene sentido* para la función $f(z)$ definida por la integral determinante:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt.$$

Ahora bien, si enunciamos el teorema de Fabry en la siguiente forma: «Dada la serie:

$$f(z) = \Sigma a_n \cdot e^{-nz}$$

si existe límite ordinario de $\frac{\Delta a_n}{a_{n+1}}$, siendo $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, y es:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\Delta a_n}{a_{n+1}} \right) = \beta$$

el punto:

$$z = -\log(1 - \beta)$$

es un punto *singular* periférico para $f(z)$», entonces, sí que cabe tentar la demostración de la siguiente proposición:

«Dada la integral determinante:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-ts} \cdot dt$$

si existe límite ordinario finito de la derivada logarítmica de la función generatriz, y es:

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ D \log a(t) \right\} = \beta,$$

el punto:

$$z = -\log(1 - \beta)$$

es *singular* para $f(z)$». Veremos en la primera parte de nuestro trabajo que tal proposición no es cierta, luego: no vale el correlativo

del teorema de Fabry, para las integrales determinantes. En cambio, demostraremos el siguiente teorema original: «Dada la integral determinante:

$$f(z) = \int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

si existe límite ordinario finito de la derivada logarítmica de la función generatriz $a(t)$, y es:

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ D \log a(t) \right\} = \beta ,$$

el punto:

$$z = \beta$$

es un punto *singular* periférico para la función $f(z)$».

Este teorema, es en realidad un teorema nuevo, válido únicamente para las integrales y para las series es falso.

3.°). El radio de convergencia de *toda* serie potencial se calcula por la fórmula (universal) de Cauchy - Hadamard, mientras que la fórmula *correlativa* de ésta para el cálculo de la abscisa de convergencia condicional de una integral determinante ordinaria (o generalizada) no es general: un caso particular importante en el cual se calcula la abscisa de convergencia de una integral determinante, con una fórmula correlativa de la de Cauchy-Hadamard, es cuando la función generatriz de la integral es una *función analítica entera* sin ceros reales, a saber: «Si la función generatriz, $a(t)$, de la integral determinante:

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

es *función analítica entera de* t y no tiene ceros reales, entonces la abscisa, C, de convergencia de esta integral, se calcula por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log |a(t)|}{t} .$$

(Como corolario interesante se tiene: «Si la generatriz $a(t)$ de una integral determinante es función analítica entera de t, y no tiene ceros reales, las tres rectas de convergencia: *condicional*, *uniforme* y *absoluta* de dicha integral coinciden»).

Pero si la función generatriz, $a\ (t)$, no es función analítica entera, lo único que puede afirmarse es que:

$$C \leq \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\log |\, a\ (t)\,|}{t} .$$

Vemos, luego, una nueva ruptura de la correlación.

El cálculo de la abscisa de convergencia condicional de una integral determinante ordinaria se ha logrado mediante fórmulas distintas según el signo de dicha abscisa, (por ejemplo, la fórmula de Cahen - Landau para el cálculo de la abscisa de convergencia condicional de una integral determinante *ordinaria* y cuya generalización a la integral determinante *generalizada* no ofrece dificultad, *supone esencialmente que dicha abscisa es positiva*).

Recordemos dos teoremas originales (cuyas demostraciones fueron dadas en nuestro curso «Funciones de varias variables complejas independientes » en el Colegio Libre de Estudios Superiores, año 1935 y que publicaremos oportunamente) sobre el cálculo de dicha abscisa: *a*) «La abscisa, C, de convergencia condicional de la integral determinante generalizada:

$$\int_0^{\infty} a\ (t)\ .\ e^{-\lambda\,(t)\ .\ z}\ .\ dt$$

se calcula por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_{[t]}^{t} \overline{a\ (\tau)}\ .\ d\tau \right|}{t}$$

indicando con:

$$\int_{[t]}^{t} \overline{a\ (\tau)}\ .\ d\tau$$

la integral de la función $a\ (\tau)$ entre límites tales que:

$$[t] \leq \lambda\ (\tau) \leq t\ ,$$

y con $[t]$ la parte entera de t».

b) «C también se calcula por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_0^t a\ (\tau)\ .\ e^{\overline{\lambda\,(\tau)}^{\,2} - \overline{\lambda\,(t)}^{\,2}}\ .\ d\tau \right|}{\lambda\ (t)} \text{»} .$$

Claro está, que logradas las fórmulas dadas por los teoremas *a*) y *b*), el cálculo, en todos los casos, de la abscisa de convergencia absoluta no ofrece ninguna dificultad (pues basta con reemplazar $a(\tau)$ por $|a(\tau)|$).

4.°). Otra diferencia notable entre la teoría de las series potenciales y la de las integrales determinantes es la siguiente: los radios de convergencia de las series potenciales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad \text{y:} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n$$

son iguales, o bien: el conjunto de puntos en los cuales una serie potencial converge *condicionalmente*, pero *no absolutamente*, es *a lo sumo* un conjunto (de un número finito o infinito de puntos) de puntos pertenecientes a la circunferencia de convergencia. En cambio: las abscisas de convergencia condicional y absoluta de una integral determinante ordinaria (o generalizada) pueden ser distintas, es decir: el conjunto de puntos en los cuales una integral determinante converge *simplemente*, pero *no absolutamente*, puede ser un recinto infinito (que está constituído por una faja del plano complejo cuyas rectas límites son paralelas al eje imaginario).

Pero, hay aún otra diferencia más profunda entre la teoría de las series potenciales y la de las integrales determinantes. En efecto, en todo círculo *interior* al círculo de convergencia, la serie converge uniformemente, en cambio: existen integrales determinantes tales que, en todo semiplano *interior* a su semiplano de convergencia, dicha integral no converge uniformemente. Ahora bien, siguiendo las huellas de Bohr (quien introdujo la noción de recta de convergencia uniforme para las *series generales de Dirichlet*) introdujimos la noción de recta de convergencia uniforme para las integrales determinantes (ordinarias y generalizadas). Héla aquí: «dada la integral:

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot s} \cdot dt$$

existe siempre una recta (que llamamos *recta de convergencia uniforme*), $R(z) \equiv x \equiv C_1$, tal que dicha integral (impropia) *converge uniformemente* para: $x > C_1 + \varepsilon$, y no para: $x > C_1 - \varepsilon$, siendo ε un número arbitrario positivo». Respecto de la recta y de la abscisa de convergencia uniforme, C_1, demostramos en nuestro curso (año 1935) del «Colegio Libre de Estudios Superiores» (y cuyas

demostraciones las publicaremos oportunamente) los siguientes teoremas:

a). «Supongamos que: el límite superior de $\frac{\log t}{\lambda(t)}$, para $t \to +\infty$, sea finito, pongamos:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log t}{\lambda(t)} = l > 0,$$

y supongamos además que:

$$\frac{dt}{d\,\lambda(t)} = O\left[e^{\lambda(t)\,.\,(l+\delta)}\right],$$

siendo δ un cierto número positivo. En tales hipótesis, se verifica que la integral:

$$\int_0^\infty a(t)\,.\,e^{-\lambda(t)\,.\,z}\,.\,dt$$

converge uniformemente, siempre que la función $f(z)$ definida por dicha integral sea regular y finita. Esto es: si el número c es tal, que la función $f(z)$ es finita y regular, para:

$$x > c + \varepsilon,$$

y no para:

$$x > c - \varepsilon,$$

se tiene que:

$$C_1 = c\,\text{»}.$$

b). «Supongamos: que $p(t)$ sea una función derivable, monótona creciente y positiva; que la función $\lambda(t)$ sea derivable y que exista una cierta constante K positiva tal que:

$$o \leq \lambda(t) + K - \lambda(t + p(t)) < \frac{d\lambda(t + p(t))}{dt}.$$

Designemos con:

$$T(t, p) \equiv T(t, p(t)),$$

el extremo superior de la integral:

$$\left| \int_t^{t+p} a(\tau)\,.\,e^{-\lambda(\tau)\,.\,iy}\,.\,d\tau \right|,$$

para:

$$o \leq p \leq p\,(t)\ ;$$

cuando la variable y, $(z = x + iy)$, varía entre: $-\infty$ y $+\infty$.

En tales hipótesis, la abscisa, C_1, de convergencia uniforme de la integral:

$$\int_0^{\infty} a\,(t)\,.\,e^{-\lambda\,(t)\,.\,z}\,.\,dt$$

es:

$$C_1 = \overline{\lim_{t \to \infty}}\ \frac{\log T\,(t\,,\,p\,(t))}{\lambda\,(t)}\ \text{»}\ .$$

c). «Supongamos que $\lambda\,(t)$ en la integral:

$$\int_0^{\infty} a\,(t)\,.\,e^{-\lambda\,(t)\,.\,z}\,.\,dt$$

admita función inversa: $t \equiv t\,(\lambda)$.

Designemos con $T\,(\alpha)$ el extremo superior de:

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} a\,(\tau)\,.\,e^{-\lambda\,(\tau)\,.\,iy}\,.\,d\tau \right|,$$

siendo:

y:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &\equiv t\,([\alpha]) \\ t_2 &\equiv t\,(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

cuando y varía en el intervalo infinito: $-\infty < y < +\infty$. Entonces, la abscisa de convergencia uniforme es:

$$C_1 = \overline{\lim_{\alpha \to \infty}}\ \frac{\log T\,(\alpha)}{\alpha}\ \text{»}\ .$$

d). «Si con $T\,(t)$ designamos el extremo superior de:

$$\left| \int_0^{t} a\,(\tau)\,.\,e^{-\lambda\,(\tau)\,.\,iy}\,.\,d\tau \right|,$$

cuando y varía en el intervalo: $-\infty < y < +\infty$, y si la abscisa, C_1, de convergencia uniforme es *positiva*, se tiene:

$$C_1 = \overline{\lim_{t \to \infty}}\ \frac{\log T\,(t)}{\lambda\,(t)}\ \text{»}\ .$$

e). «Si: $\varphi(\alpha)$ es una función real derivable para $\alpha \geq \lambda(o)$, y satisface a las condiciones:

$$1) \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = +\infty ;$$

$$2) \qquad \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d\varphi(\alpha)}{\alpha^k \cdot d\alpha} = o ,$$

donde k es un cierto número positivo; (de la condición 1) se deduce que:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = +\infty \Big) ;$$

y si con $T(t)$, designamos el extremo superior de:

$$\left| \int_0^t a(\tau) \cdot e^{\varphi[\lambda(\tau)] - \varphi[\lambda(t)] - \lambda(\tau) \cdot i \cdot y} \cdot d\tau \right| ,$$

cuando y varía en el intervalo infinito: $-\infty < y < +\infty$, se tiene:

$$C_1 = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log T(t)}{\lambda(t)} \text{ »} .$$

Haciendo en los teoremas *a*), *b*), *c*), *d*) y *e*), $\lambda(t) = t$, se obtienen diversas fórmulas (universales) para calcular la abscisa de convergencia uniforme de toda integral de Laplace.
(Es evidente que es:

$$C \leq C_1 \leq C_2$$

siendo: C la abscisa de convergencia condicional, C_1 la de convergencia uniforme y C_2 la de convergencia absoluta. En esta última doble relación pueden presentarse efectivamente las cuatro combinaciones posibles de signos).

Es notable el siguiente teorema que hemos obtenido (análogo a un teorema que Bohr enunció para las series generales de Dirichlet):

f). «La función $f(z)$ definida por la integral:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt ,$$

toma en cada faja (cuyas rectas-fronteras son paralelas al eje imaginario):

$$C_1 - \varepsilon < R(z) \equiv x < C_1 + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > o$, una infinidad de veces, cualquier valor (real o complejo, incluso el punto del infinito) arbitrario prefijado, con excepción *a lo sumo* de uno».

Este último teorema recuerda al célebre teorema de Picard sobre las funciones analíticas con punto singular esencial aislado, sin ser evidentemente su correlativo (además la demostración del teorema *f*), difiere completamente en su esencia de las diversas demostraciones dadas del teorema de Picard).

Ahora bien, la idea de *correlación* es impotente para desarrollar de una manera completa la teoría de las singularidades de las funciones analíticas definidas por integrales determinantes, aún limitándonos a la *clase restringida* de funciones analíticas definidas por integrales determinantes que poseen, por lo menos, un punto singular periférico. Este hecho se explica teniendo en cuenta que, en la teoría clásica de funciones, el *elemento analítico generador de las funciones analíticas es la serie potencial*(*).

Condiciones necesarias y suficientes para que un punto periférico de una función analítica definida por una serie potencial, sea singular para dicha función, han sido dadas por: Hadamard («Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor», Journal de Mathématiques, 4.e série, t. 8, 1892), Fabry («Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans les cas très généraux», Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,

(*) Surge entonces la idea de desarrollar *una teoría de las funciones analíticas partiendo de algoritmos funcionales distintos del de las series potenciales*. En efecto, en un trabajo que oportunamente hemos de publicar, llegamos al concepto de función analítica tomando como *elemento de función analítica*, lo que llamamos *la integral determinante ordinaria respecto de un punto, propio o impropio* (como caso particular, cuando el *elemento-integral determinante ordinaria*, se refiere al punto impropio del plano complejo, se obtiene la corriente integral de Laplace).

Procediendo de esta manera se conservan algunas de las propiedades (muy pocas) de la teoría clásica y se obtienen muchísimas otras nuevas, interesantes desde diversos puntos de vista. Una de las más importantes consecuencias (que hace resaltar la sencillez de la teoría clásica) es que, en general, no se puede asegurar la existencia de punto *singular*, sobre el contorno del recinto de convergencia del algoritmo funcional considerado, cuando no se usan series potenciales, bien entendido que entonces, evidentemente, la definición de punto singular no es la corriente.

3.e série, t. 13) y Pringsheim («Ueber einige funktionenth. Anwend. der Euler. Reinent.», Sitzungs. der Kgl. Bayr. Ak., 1912). *Pero este criterio de Hadamard-Fabry-Pringsheim no admite correlativo para las integrales determinantes.* Estamos, luego, en presencia de un nuevo hecho en que falla la idea de correlación.

Por lo tanto se impone investigar un criterio (condición necesaria y suficiente) para reconocer la regularidad o la singularidad de un punto periférico para una función analítica, cuando ésta venga definida por una *integral determinante.* En la primera parte del presente trabajo obtenemos tal criterio (teorema fundamental). Una de las ventajas (que lo hace de práctico manejo) de nuestro criterio fundamental, reside en que en él no intervienen integrales entre límites infinitos sino integrales entre límites finitos (aunque variables, y se le puede aplicar, por consiguiente, algún teorema de media) y contienen ciertos parámetros que pueden variar en ciertos intervalos, lo que, en la práctica, puede simplificar notablemente los cálculos, mediante una elección adecuada de los valores particulares de dichos parámetros.

Además nuestro criterio fundamental admite un correlativo para las series simples potenciales, y este *criterio correlativo* difiere esencialmente del de Hadamard-Fabry-Pringsheim.

Nuestro criterio fundamental vale (como lo demostramos) no solamente para las integrales determinantes ordinarias (integrales de Laplace) sino también para las integrales determinantes generalizadas(*) (llamadas también integrales de Dirichlet, por su analogía con las series generales de Dirichlet).

Consideremos el conjunto de las propiedades referentes a la *regularidad* y a la *singularidad* de los puntos periféricos, o no, de las funciones analíticas definidas por series simples potenciales y por

(*) Podría creerse que la integral determinante generalizada:

$$\int_0^{\infty} a\,(t)\,.\,e^{-\lambda\,(t)\,.\,z}\,.\,dt$$

donde es: 1°) $\lambda(t)$ *creciente* y 2°) $\lim_{t \to \infty} \lambda\,(t) = +\infty$, se puede reducir a una integral determinante ordinaria:

$$\int_{\lambda\,(o)}^{\infty} \frac{a\,(t)}{\lambda'\,(t)} \cdot e^{-tz}\,.\,dt\,.$$

Tal reducción es solamente posible si la función $\lambda\,(t)$ es *monótoma creciente.* Por lo tanto, no carece de interés el estudio de las integrales de Dirichlet.

integrales determinantes. Estas propiedades pueden dividirse en tres categorías:

1.°) teoremas para las series que *admiten un correlativo* para las integrales, o bien, teoremas para las integrales que admiten un *correlativo* para las series (nótese bien, que esto no quiere decir que de un cierto teorema para las series o para las integrales, se deduce *de inmediato* otro cierto teorema para las integrales o para las series, respectivamente. A veces la investigación del correlativo de un teorema ofrece serias dificultades, tanto para lograr su enunciado como su demostración);

2.°) teoremas para las series que *no admiten un correlativo* para las integrales;

3.°) teoremas para las integrales que *no admiten un correlativo* para las series.

Evidentemente, los teoremas que presentan mayor interés desde el punto de vista de la novedad son los de la *tercera categoría*: en nuestro trabajo (primera parte) logramos algunos de ellos mediante la aplicación de nuestro criterio fundamental.

En la abundante bibliografía existente sobre las singularidades de las funciones analíticas no encontramos ningún teorema de la tercera categoría (lo que se explica teniendo en cuenta que dicha bibliografía contempla las funciones analíticas definidas mediante series potenciales).

Luego se plantea un doble problema, a saber:

a) obtener teoremas de la tercera categoría; y:

b) en vista de los numerosos teoremas conocidos sobre las singularidades de las funciones analíticas definidas por series potenciales, averiguar cuáles de estos teoremas admiten un correlativo para las integrales y cuáles no lo admiten.

Con nuestro *criterio fundamental* resolvemos este doble problema y en la primera parte de la presente memoria consignamos algunos de los resultados obtenidos. Además aplicando el correlativo de nuestro criterio a las series se pueden demostrar de inmediato todos los teoremas que son ya clásicos sobre las singularidades situadas sobre la circunferencia de convergencia, como ser: los teoremas de Vivanti-Borel-Pringsheim, Dienes, Tsuji, Ssász, Kössler, Leau, Faber, Wigert, Le Roy, Lindelöf, Carlson, Bernstein, Fabry, Soula, Hadamard, Fatou, Borel, Pólya, Mandelbrojt, Hurwitz-Pincherle, Ostrowski, etc..

Enunciemos, en esta introducción a la primera parte, los resultados obtenidos aplicando nuestro criterio fundamental (las demostraciones de algunos de ellos están contenidas en la primera parte de este trabajo).

Nos limitaremos solamente a enunciar los teoremas originales, sin considerar en este trabajo las simplificaciones que podría reportar nuestro criterio, adaptado a las series potenciales, en las demostraciones de teoremas ya conocidos.

Teorema 1°.). (*) (*Teorema fundamental*):

«Dada la función analítica $f(z)$ definida por la integral determinante generalizada:

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt \qquad [1]$$

cuya abscisa de convergencia condicional, C, se supone finita; es condición necesaria y suficiente para que el punto $C + i\gamma$, ($\gamma \equiv$ real), de su recta de convergencia, sea *singular* para $f(z)$, que se verifique:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{\sigma e}{n}\right)^n \cdot \left| \int_{\tau}^{\varrho} a(t) \cdot e^{-(C + i\gamma) \cdot \lambda(t)} \cdot t^n \cdot e^{-\lambda(t) \cdot \sigma} \cdot dt \right|} = 1, \quad [2]$$

donde es:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\tau) &= \frac{n}{\sigma} \cdot (1 - \omega) \\ \text{y:} \qquad & \\ \lambda(\rho) &= \frac{n}{\sigma} \cdot (1 + \omega) \end{aligned}\right\}$$

siendo σ y ω números arbitrarios reales (pero fijos), tales que:

$$\sigma > o\,, \qquad \text{y}\,, \qquad o < \omega < 1 \text{ »}\,.$$

Teorema 2.°). «Con las mismas notaciones del teorema 1.°), se tiene: es condición necesaria y suficiente para que el punto periférico $C + i\gamma$, sea *regular* para $f(z)$, que el límite superior que aparece en el primer miembro de la relación [2] sea menor que la unidad».

Si la integral de Dirichlet [1] es una integral determinante ordinaria (esto es: si es $\lambda(t) \equiv t$), aplicando los teoremas 1.°) y 2.°) se tienen las condiciones necesarias y suficientes para que un punto periférico sea *singular* o *regular* para una función analítica definida

(*) La numeración de los teoremas en esta introducción no corresponde a la numeración de los teoremas que demostramos en la primera parte de este trabajo.

por una integral de Laplace. Como caso particular interesante (y de fecunda aplicación) se puede enunciar el siguiente:

Teorema 3.°). «Dada la función analítica $f(z)$ definida por la integral determinante ordinaria:

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

cuya abscisa de convergencia condicional es nula, es condición necesaria y suficiente para que el origen, $z = o$, sea *singular* o *regular* para $f(z)$, que se verifique:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \left| \int_n^{2n} a(t) \cdot t^n \cdot e^{-\frac{2}{3}t} \cdot dt \right|} \leqslant 1 ,$$

respectivamente».

Una de las tantas aplicaciones que se pueden hacer de los teoremas 1.°) y 2.°) es la construcción efectiva de integrales de Laplace, tales que *todos* los puntos de su recta de convergencia sean *regulares* o bien *singulares* (*) para la función $f(z)$ que define dicha integral.

Adaptando, como dijimos, a las series potenciales nuestro criterio fundamental obtenemos varios *nuevos* teoremas relativos a las funciones analíticas definidas por series potenciales, a saber:

Teorema 4.°). «Si el argumento (**), φ_n, del coeficiente a_n de la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n ,$$

satisface a la condición:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1 ,$$

y además la parte real de a_n no es negativa, el punto: $z = R$, en el cual la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo, es *singular* para $f(z)$».

(*) Se logran, efectivamente, interesantes ejemplos de integrales determinantes *lagunares*, cuyo estudio será objeto de otro trabajo.

(**) En todo lo que sigue al hablar del argumento de un número complejo nos referimos a su *valor principal*.

Este último teorema constituye una amplia generalización de los dos teoremas, ya clásicos, siguientes:

a) «si es $a_n \geq o$, el punto $z = R$ es singular para $f(z)$» (Vivanti, «Rivista di matematica», t. 3, pág. 112, 1893; Pringsheim, «Mathematische Annalen», t. 44, pág. 42, 1894, y, «Sitzungs. der Kgl. Bayr. Ak., 1912; Landau, «Mathematische Annalen», t. 61, pág. 535, 1905);

b) «si la parte real de a_n es no-negativa y su argumento φ_n se mantiene inferior, a partir de un valor fijo de n en adelante,a un ángulo fijo $\tau < \frac{\pi}{2}$, el punto $z = R$ es singular para $f(z)$» (Dienes, « Essai sur les singularités des fonctions analytiques », Journal de Mathématiques, 3.e série, t. 4).

Teorema 5.°). «Si el argumento, φ_n, del coeficiente a_n de la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

es tal que : dado un número arbitrario positivo ε, existe un valor $n_o \equiv n_o(\varepsilon)$, tal que si es: $n \geq n_o$, se verifica que:

$$\left| \sqrt[n]{\cos \varphi_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

salvo para una sucesión (infinita) de valores de n , $n = \delta(m)$, que cumple la condición:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\delta(m)}{m} = \infty ,$$

y si la parte real de a_n no es negativa, el punto: $z = R$, en el cual la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo, es *singular* para $f(z)$».

Este último teorema constituye una amplia generalización de un teorema de Tsuji («On power series having only logarithmic algebrical singularities on the circle of convergence», Japanese Journal of Math. t. III, IV y V, 1926-1927-1928).

Los teoremas 4.°) y 5.°) son de la *primera categoría*, (*) es decir,

(*) Sería muy laboriosa la demostración de los teoremas 4.°) y 5.°) empleando el criterio de Hadamard-Fabry-Pringsheim, para el reconocimiento de la singularidad de un punto periférico de una función analítica definida por una serie potencial. Aún así, las *demostraciones* de los teoremas 4.°) y 5.°) no tendrían correlativas para los teoremas 6.°) y 7.°).

admiten éstos sendos correlativos para las integrales. En efecto, con nuestro criterio fundamental se prueban los dos siguientes teoremas.

Teorema 6.°). «Si el argumento, $\varphi(t)$, de la función generatriz $a(t)$ de la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt$$

satisface a la condición:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log \cos \varphi(t)}{t} = o$$

y además la parte real de $a(t)$ no es negativa, el punto: $z = C$, en el cual la recta de convergencia condicional corta al eje real,es *singular* para $f(z)$».

Teorema 7.°). «Si el argumento, $\varphi(t)$, de la función generatriz $a(t)$ de la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt$$

es tal que: dado un número arbitrario positivo ε, existe un valor $t_o = t_o(\varepsilon)$, tal que si es: $t \geq t_o$, se verifica que:

$$\left| \frac{\log \cos \varphi(t)}{t} \right| < \varepsilon$$

salvo para un conjunto infinito de valores de t, $t = \delta(\tau)$, que cumple la condición:

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\delta(\tau)}{\tau} = \infty ,$$

y si la parte real de $a(t)$ no es negativa, el punto: $z = C$, en el cual la recta de convergencia condicional corta al eje real, es *singular* para $f(z)$».

Los teoremas 4.°) y 5.°) valen también para las funciones analíticas definidas por series generales de Dirichlet (obteniéndose de este modo una amplia generalización de un teorema de Fekete).

El interés de los teoremas 4.°) y 5.°) (6.°) y 7.°)) reside precisamente en que ellos aseguran la singularidad del punto en el cual la circun-

ferencia de convergencia (recta de convergencia) de la serie simple potencial (integral determinante ordinaria o generalizada), corta al semieje real y positivo (eje real), para la función definida por dicha serie (integral), en casos en que el coeficiente (función generatriz) complejo a_n (a (t)) tiende al origen, $z = o$, por un camino tangente (*) al eje imaginario, en cuyos casos los teoremas de Vivanti-Pringsheim, Dienes, Tsuji y Fekete (y sus correlativos para las integrales) no aseguran nada, puesto que estos últimos teoremas exigen esencialmente caminos *stolzianos*.

Interesantes corolarios se infieren de los teoremas 4.°), 5.°), 6.°) y 7.°).

Imponiendo al coeficiente a_n la condición de que exista límite ordinario de $\sqrt[n]{|a_n|}$, logramos un nuevo teorema más amplio en cierto sentido que el 4.°), a saber:

Teorema 8.°). «Dada la función analítica $f(z)$, definida por la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

cuyo coeficiente tiene su parte real no-negativa, a partir de un cierto valor de n, suficientemente grande, y suponiendo que se cumplen las dos siguientes condiciones:

a) existe límite ordinario, para $n \to \infty$, de $\sqrt[n]{|a_n|}$;
b) el argumento, φ_n, de a_n es tal que:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \cos \varphi_n}{n} = o ,$$

entonces se verifica que: el punto en el cual la circunferencia de convergencia de la serie corta al semieje real y positivo, es *singular* para $f(z)$».

El teorema 8.°), en realidad, no es un caso particular ni una generalización del teorema 4.°), es decir, la relación entre estos dos teoremas no es de inclusión sino de imbricación.

Teorema 9.°). «Dada la función analítica $f(z)$, definida por la integral:

$$\int_0^{\infty} a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt$$

(*) Nótese que este camino es muchísimo más general que un camino *stolziano*.

cuya función generatriz (compleja) tiene su parte real no-negativa, a partir de un cierto valor de t, suficientemente grande, y suponiendo que se cumplen las dos siguientes condiciones:

a) existe límite ordinario, para $t \to \infty$, de $\dfrac{\log |a(t)|}{t}$;

b) el argumento, $\varphi(t)$, de $a(t)$ es tal que:

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \cos \varphi(t)}{t} = o,$$

entonces se verifica que: el punto en el cual la recta de convergencia de la integral corta al eje real, es *singular* para $f(z)$».

Un caso en el cual se verifica la hipótesis a) es cuando la generatriz $a(t)$, es función analítica entera de t, o sea, cuando es:

$$\sqrt[(n)]{|a(o)|} = o(n); \qquad \text{y además:} \qquad a(t) \neq o.$$

La relación entre los teoremas 6.°) y 8.°) es de imbricación.

Obsérvese que el teorema 4.°) no exige la existencia del límite (ordinario) del módulo del argumento, φ_n, del coeficiente a_n, para $n \to \infty$. Supongamos ahora que tal límite exista. Caben dos casos:

1) $$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n| < \frac{\pi}{2}$$

2) $$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n| = \frac{\pi}{2}.$$

Si se verifica el primer caso, se cumple la condición requerida por el teorema de Dienes y no se tendría, entonces, nada nuevo; pero si se verifica el segundo caso ya no vale el teorema de Dienes, y sin embargo se puede asegurar que: el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo es *singular* para $f(z)$, siempre que el infinitésimo $\left(\dfrac{\pi}{2} - |\varphi_n|\right)$ sea de un orden tal que:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2} - |\varphi_n|} = 1.$$

Nótese que esta última conclusión generaliza el teorema de Vivanti-Pringsheim pero no el de Dienes-Fekete, pero tampoco dicha conclusión es un caso particular de este último teorema.

Otros dos teoremas nuevos sobre las series potenciales, de aplicación práctica más difícil que los anteriores son los siguientes.

Teorema 10.°). «Sea la función analítica $f(z)$ definida por la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \; ; \; [a_n \equiv \rho_n (\cos \varphi_n + i \cdot \operatorname{sen} \varphi_n)] \; ; \left(\text{con: } -\frac{\pi}{2} < \varphi_n < \frac{\pi}{2} \right) ;$$

con parte real de a_n no-negativa. Indiquemos con: ρ_ν , $\nu \equiv \nu\,(n)$, el menor (en sentido amplio) de los valores de ρ_m, tales que:

$$\frac{n}{\sigma} \cdot (1 - \omega) \leq m \leq \frac{n}{\sigma} \cdot (1 + \omega) \, ,$$

y con: φ_μ , $\mu \equiv \mu\,(n)$, el mayor (en sentido amplio) de los valores de φ_m, para los mismos valores de m; siendo σ y ω números arbitrarios reales (pero fijos) tales que:

$$\sigma > o \, , \qquad \text{y,} \qquad o < \omega < 1 \, .$$

Supongamos además que se cumplan las dos condiciones siguientes:

a)
$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \cos \varphi_n}{n} = o$$

b)
$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu \cdot \cos \varphi_\mu} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\rho_\nu} \cdot \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\cos \varphi_\mu} \, .$$

En tales hipótesis, el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo es *singular* para $f(z)$».

Teorema 11.°). «Sea:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad ; \quad [a_n \equiv \rho_n (\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n)] \; ;$$

$$\left(\text{con: } o \leq \varphi_n \leq \frac{\pi}{2} \right) .$$

Llamemos: φ_p, $p \equiv p\,(n)$, al mayor (en sentido amplio) de los términos de la sucesión:

$$\varphi_n \, , \, \varphi_{n+1} \, , \, \ldots\ldots \, , \, \varphi_{2n} \; ;$$

y: φ_q, $q \equiv q\ (n)$, al menor (en sentido amplio) de los téiminos de la misma sucesión. Llamemos: ρ_ν, $\nu \equiv \nu\ (n)$, al menor (en sentido amplio) de los términos de la sucesión:

$$\rho_n\ ,\ \rho_{n+1}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \rho_{2n}\ .$$

Supongamos que sea:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\ \sqrt{\rho_\nu\ .\ (\cos \varphi_p + \operatorname{sen} \varphi_q)} = 1\ .$$

En tales hipótesis, el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo es *singular* para $f\ (z)$».

Es interesante el siguiente teorema nuevo, cuya relación con los teoremas de Vivanti-Pringsheim, Fekete-Dienes y Tsuji, no es de inclusión sino de imbricación.

Teorema 12.°). « Si los coeficientes a_n (complejos) de la serie:

$$f\ (z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ .\ z^n\ ,$$

a partir de un valor de n, suficientemente grande, están contenidos en un recinto convexo, D, finito, tal que la distancia del origen, $z = o$, a su contorno no es nula; se verifica que:

a) el radio de convergencia de la serie, es $R = 1$, y:

b) el punto $z = 1$ es *singular* para $f\ (z)$». (*)

En vista de la gran generalidad de los teoremas 4.°), 5.°), 8.°), 10.°), 11.°) y 12.°), se plantea el siguiente problema: obtener condiciones suficientes sencillas a las cuales debe satisfacer el argumento, φ_n, de a_n, bajo las cuales se pueda asegurar que el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al semieje real y positivo sea *regular* para $f\ (z)$. En la primera parte de este trabajo resolvemos tal problema, empleando nuestro criterio fundamental.

Los teoremas 10.°), 11.°) y 12.°), así como la observación al teorema 4.°), son de la primera categoría, esto es, admiten correlativos para las integrales. Baste con enunciar solamente algunos de ellos.

(*) La conclusión *a*) de este teorema se deduce de la fórmula de Cauchy-Hadamard, en cuanto a la conclusión *b*) podría creerse que con un simple cambio de variables se deduce del teorema de Dienes, lo que constituye una suposición completamente ilusoria.

Teorema 13.°). «Si el valor absoluto del argumento, $\varphi\,(t)$, de la función generatriz (compleja) $a\,(t)$, cuya parte real es no-negativa, de la integral:

$$f\,(z) = \int_0^{\infty} a\,(t)\,.\,e^{-\lambda\,(t)\,.\,z}\,.\,dt\,,$$

tiende al límite $\frac{\pi}{2}$, para $t \to +\infty$, pero satisfaciendo a la condición:

$$\lim_{t \to \infty} \left[\left(\frac{\pi}{2} - |\,\varphi\,(t)\,|\right)^{\frac{1}{t}}\right] = 1\,,$$

el punto en el cual la recta de convergencia de la integral corta al eje real es *singular* para $f\,(z)$».

Teorema 14.°). «Si el afijo de la función generatriz (compleja) $a\,(t)$, cuya parte real toma signos positivo y negativo, de la integral:

$$f\,(z) = \int_0^{\infty} a\,(t)\,.\,e^{-tz}\,.\,dt\,,$$

a partir de un valor de t, suficientemente grande, está contenido en un recinto convexo, D, finito, tal que la distancia del origen, $z = o$, a su contorno no es nula, se verifica que:

a) la abscisa de convergencia de la integral es $C = o$, y:

b) el punto $z = o$ es *singular* para $f\,(z)$ ».

A este teorema 14.°) cabe hacer una observación (análogamente para el teorema 12.°)); en efecto, si el afijo de $a\,(t)$ varía, por ejemplo, en el interior de un círculo tangente a los ejes coordenados, el teorema 14.°) afirma la *singularidad* del origen, mientras que el correlativo del teorema de Dienes-Fekete, no afirma nada.

Pasemos a enunciar varios teoremas originales (que se prueban también mediante la aplicación de nuestro criterio fundamental) de la *tercera categoría.*

Teorema 15.°). «Si a partir de un cierto valor (fijo) de t, en adelante, el argumento, $\varphi\,(t)$, de la función generatriz $a\,(t)$ de la integral:

$$f\,(z) = \int_0^{\infty} a\,(t)\,.\,e^{-tz}\,.\,dt\,,$$

es tal que los módulos de las diferencias:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi(t)$$

y:

$$-\frac{\pi}{2} - \varphi(t),$$

se mantienen superiores a un cierto número positivo δ (fijo) y además la abscisa de convergencia (*) de la integral se calcula por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log |a(t)|}{t},$$

entonces, el punto $z = C$ es *singular* para $f(z)$».

Análogamente, demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 16.°). «Si a partir de un cierto valor (fijo) de t, en adelante, el argumento, $\varphi(t)$, de la función generatriz $a(t)$ de la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt,$$

es tal que su módulo, así como el de la diferencia:

$$\pi - \varphi(t),$$

se mantienen superiores a un cierto número positivo δ (fijo) y además la abscisa de convergencia de la integral se calcula por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log |a(t)|}{t},$$

entonces el punto $z = C$ es *singular* para $f(z)$».

(En realidad, el teorema 16.°) es otra expresión del teorema 15.°), y si lo hemos consignado especialmente es por razones que luego veremos).

(*) Recordemos que un caso sencillo en el cual se puede asegurar el cumplimiento de esta segunda hipótesis, es cuando la generatriz es una función analítica entera de t, sin ceros reales.

Si la abscisa de convergencia de la integral determinante no se pudiese calcular por la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log | a(t) |}{t} ,$$

la conclusión del teorema 15.°) (teorema 16.°)) puede ser falsa. En efecto; basta considerar la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t \, . \, e^{-tz} \, . \, dt$$

donde es:

$$\varphi(t) \equiv o$$

y:

$$C = o ,$$

el punto $z = o$ es *regular* para la función $\frac{1}{1 + z^2}$, que define dicha integral. Nótese que en esta integral la abscisa de convergencia no se calcula por la fórmula correlativa de la de Cauchy-Hadamard $\left(\text{la expresión: } \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log | \operatorname{sen} t |}{t} \text{ no tiene sentido}\right)$.

El teorema 15.°) (teorema 16.°)) no tiene su correlativo para las series potenciales. En efecto, ante todo recordemos que: lo correlativo del punto en el cual la recta de convergencia de una integral determinante corta al *eje real*, es, para las series, el punto en el cual la circunferencia de convergencia corta al *semieje real y positivo*. La serie:

$$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots\ldots + (-1)^n \, . \, z^n + \ldots\ldots$$

cumple las dos hipótesis correlativas del teorema 15.°) y sin embargo el punto $z = 1$ es *regular* para la función $\frac{1}{1 + z}$, que define dicha serie.

El teorema correlativo del de Dienes-Fekete le impone al afijo de $a(t)$, a partir de un valor de t en adelante, la condición de variar en el interior de un ángulo de vértice en el origen, simétrico respecto del semieje real y positivo y de amplitud menor que π, mientras que el teorema 15.°) le permite variar al afijo de $a(t)$ en dos ángulos opuestos por su vértice (origen), siendo la amplitud de cada ángulo menor que π. En cambio, el teorema correlativo del de Dienes-Fekete

no exige la segunda hipótesis del teorema 15.°). Luego: el teorema 15.°) es en un aspecto (variación del afijo de $a\,(t)$) más general que el correlativo del teorema de Dienes-Fekete y en otro aspecto(abscisa de convergencia) más restringido.

El teorema 15.°) (que lo enunciamos para una integral determinante ordinaria pero que también vale para una integral determinante generalizada) admite la siguiente generalización, la cual constituye, a su vez, una generalización *en parte* del teorema 6.°), a saber:

Teorema 17.°): «Si el argumento, $\varphi\,(t)$, de $a\,(t)$ de la integral:

$$f\,(z) = \int_0^\infty a\,(t)\,.\,e^{-\lambda\,(t)\,.\,z}\,.\,dt$$

satisface a la condición:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log\,|\,\cos\varphi\,(t)\,|}{t} = o$$

y además es:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}}\ \frac{\log\,|\,a\,(t)\,|}{t}\,,$$

el punto $z = C$ es *singular* para $f\,(z)$».

Este teorema es también de la *tercera categoría* y puede generalizarse aún más del siguiente modo:

Teorema 18.°). «Si el argumento, $\varphi\,(t)$, de $a\,(t)$ en la integral:

$$f\,(z) = \int_0^\infty a\,(t)\,.\,e^{-\lambda\,(t)\,.\,z}\,.\,dt$$

es tal que: dado un número arbitrario positivo ε, existe un valor $t_o = t_o\,(\varepsilon)$, tal que si es: $t \geq t_o$, se verifica que:

$$\left|\ \frac{\log\,|\,\cos\varphi\,(t)\,|}{t}\ \right| < \varepsilon\,,$$

salvo para un conjunto infinito de valores de t, $t = \delta\,(\tau)$, que cumple la condición:

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{\delta\,(\tau)}{\tau} = \infty\,,$$

y si además es:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log | a(t) |}{t},$$

entonces, el punto $z = C$ es *singular* para $f(z)$».

La relación entre los teoremas 18.°) y 7.°) es de imbricación.

Un corolario interesante del teorema 15.°) es: «si la función generatriz $a(t)$ en la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt$$

es *real* y además es:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log | a(t) |}{t},$$

entonces el punto $z = C$ es *singular* para $f(z)$».

Como dijimos más arriba, el teorema de Fabry pertenece a la *segunda categoría*, pero existe un teorema (original) que tiene parecido con él, *pero que no es su correlativo*, a pesar de cierta similitud en sus enunciados. Dicho teorema es el siguiente:

Teorema 19.°). «Si la función generatriz $a(t)$ en la integral:

$$f(z) = \int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

es derivable, y se verifica:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{da(t)}{a(t) \cdot dt} = \alpha,$$

entonces el punto:

$$z = -\log(1 - \alpha)$$

es *singular* para $f(z)$».

Volvamos al teorema de Fabry de la teoría de las series potenciales. Este teorema exige dos condiciones; en efecto, llamando ρ_n y φ_n al módulo y al argumento, respectivamente, del coeficiente a_n de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n,$$

el teorema de Fabry asegura que: el punto: $R \cdot e^{i\varphi}$, ($R \equiv$ radio de convergencia de la serie dada) es *singular* para $f(z)$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$(a) \qquad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \right) = R$$

$$(b) \qquad \lim_{n \to \infty} (\varphi_n - \varphi_{n+1}) = \varphi \, .$$

Ahora bien, cabe preguntarse: ¿son *necesarias* estas dos condiciones para la validez de la conclusión del teorema de Fabry? Con nuestro criterio fundamental respondemos *negativamente* a tal pregunta, con el siguiente teorema.

Teorema 20°). « Si el argumento, φ_n, del coeficiente a_n de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

satisface a la condición:

$$\lim_{n \to \infty} (\varphi_n - \varphi_{n+1}) = \varphi$$

el punto situado sobre la circunferencia de convergencia cuyo argumento es φ, es *singular* para $f(z)$ ».

Como se ve, la condición (a) *no es necesaria.*

Este teorema, convenientemente transformado, es válido para las funciones definidas por series generales de Dirichlet, pero imponiéndoles a dichas series la condición de que sus abscisas de convergencia, condicional y absoluta, sean *iguales.* En efecto, logramos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 21°). « Si el argumento, φ_n, del coeficiente a_n de la serie general de Dirichlet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z}$$

satisface a la condición:

$$\lim_{n = \infty} (\varphi_n - \varphi_{n+1}) = \varphi \, ,$$

y además las abscisas de convergencia, condicional y absoluta, son

iguales(*); entonces, el punto, perteneciente a la recta de convergencia, cuya ordenada es: φ, es *singular* para $f(z)$».

Si las abscisas de convergencia, condicional y absoluta, de la serie de Dirichlet no son iguales, la conclusión del teorema 21.°) puede ser falsa.

Paralelamente al teorema 20.°), hemos logrado demostrar para las integrales determinantes el siguiente teorema.

Teorema 22.°). « Si el argumento, $\varphi(t)$, de la función generatriz $a(t)$, en la integral:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt ,$$

es derivable y satisface a la condición:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d\,\varphi(t)}{dt} = \varphi ,$$

y además las abscisas de convergencia, simple y absoluta, son *iguales*(**); entonces, el punto, perteneciente a la recta de convergencia, cuya ordenada es: φ, es *singular* para $f(z)$ ».

(*) Téngase en cuenta que, un caso sencillo en el cual se puede asegurar la igualdad de las abscisas de convergencia, condicional (o simple) y absoluta, de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n \cdot z} ,$$

es cuando se verifica la condición:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0 ,$$

en cuyo caso, el valor común, C, de dichas abscisas, se puede calcular mediante la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |\, a_n \,|}{\lambda_n} .$$

(Valiron, « Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet », Bull. Soc. math. de France, t. 52, 1924).

(**) Un caso sencillo en el cual se verifica esta igualdad, se presenta cuando es $a(t)$ función analítica entera de t, sin ceros reales.

Si las abscisas de convergencia, condicional y absoluta, de la integral determinante no son iguales, la conclusión del teorema 22.°) puede ser falsa.

El teorema 22.°) generaliza el teorema 19.°) en la misma medida que el teorema 20.°) generaliza el de Fabry.

Nótese que el teorema de Fabry, a pesar de su profundo alcance, no generaliza teoremas tan sencillos como el de Vivanti-Pringsheim, en cambio, nuestro teorema 20.°) logra, evidentemente, tales generalizaciones. Análoga observación cabe hacer respecto de los teoremas 21.°) y de Landau (« Ueber einen Satz von Tschebyschef », Math. Ann., t. 61, 1905); y respecto de los teoremas 22.°) y el correlativo para las integrales del teorema de Vivanti-Pringsheim.

Las relaciones entre: los teoremas 20.°) y el de Dienes; los teoremas 21.°) y el de Fekete y los teoremas 22.°) y 6.°) es de imbricación.

Habiendo visto que la condición (*a*) *no es necesaria* para la validez de la conclusión del teorema de Fabry, cabe, entonces, preguntarse: ¿en qué medida será *necesaria* la condición (*b*)? Es decir, se plantea el siguiente problema: « *determinar algoritmos regulares de convergencia, tales que, si el límite generalizado de la diferencia* $\varphi_n - \varphi_{n+1}$, *según dichos algoritmos, es* φ; *se pueda asegurar que el punto*: $R \cdot e^{i\varphi}$, *es singular para* $f(z)$.» En otra memoria daremos *algunas* soluciones de este complicado e interesante problema.

Siguiendo en este orden de ideas, de averiguar si las conclusiones de algunos de los teoremas enunciados pueden valer en hipótesis más generales que las estipuladas, probamos que: las conclusiones de los teoremas 15.°), 16.°), 17.°) y 18.°) siguen siendo válidas reemplazando la hipótesis: (*a*) « la abscisa de convergencia, C, se calcula mediante la fórmula:

$$C = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log | a(t) |}{t} \text{ »},$$

por la siguiente, (que es más general):

(*b*) « las abscisas de convergencia, condicional (o simple) y absoluta, de la integral determinante ordinaria:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-tz} \cdot dt$$

o de la integral determinante generalizada:

$$\int_0^\infty a(t) \cdot e^{-\lambda(t) \cdot z} \cdot dt$$

son iguales ».

Observemos finalmente que: enunciando varios de los teoremas obtenidos, en cierta forma, *adoptarían éstos un aspecto en apariencia más general*(*); por ejemplo, el teorema 6.°), puede enunciarse del siguiente modo: « Si existe una recta que pase por el origen, de inclinación α con respecto al semieje real y positivo, tal que el afijo de $a\ (t)$, a partir de un valor de t, suficientemente grande, esté situado en un mismo semiplano respecto de dicha recta, y se verifica la igualdad:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log \cos\ (\varphi\ (t) - \alpha)}{t} = 0\ ,$$

entonces, el punto: $z = C$, en el cual la recta de convergencia simple corta al eje real, es *singular* para $f\ (z)$ ».

Los teoremas hasta aquí enunciados se refieren a *singularidades periféricas*. Consignamos también en la primera parte algunos teoremas sobre *singularidades en general* (de la primera categoría), de los cuales nos limitamos, solamente, a enunciar en esta introducción, el correlativo del célebre teorema de Hadamard sobre *la multiplicación de las singularidades* (« Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor», Journal de Mathématiques, 4.e série, t. 8, 1892).

Teorema 23.°). (*Teorema de la sumación de las singularidades*). « Supongamos que las funciones holomorfas $f\ (z)$ y $g\ (z)$, en sendos semiplanos, sean expresables en forma de integrales determinantes, a saber:

$$f\ (z) = \int_0^\infty a\ (t)\ .\ e^{-tz}\ .\ dt$$

$$g\ (z) = \int_0^\infty b\ (t)\ .\ e^{-tz}\ .\ dt\ .$$

En tales hipótesis, se tiene que: la función $h\ (z)$ definida por la integral:

$$\int_0^\infty a\ (t)\ .\ b\ (t)\ .\ e^{-tz}\ .\ dt$$

(*) Recuérdese a este respecto que: « si el punto: $z = z_0$ es *singular* (*regular*) para $f\ (z)$, el punto: $z = az_0 + b$, (a y b constantes), será *singular* (*regular*) para $f\ (az + b)$ ». Esta propiedad que es casi trivial en la *teoría funcional de las singularidades de las funciones analíticas de una sola variable*, adquirirá relieve característico al desarrollar *aritméticamente la noción de singularidad de un punto para una función analítica de dos o más variables independientes*, tal cual lo hacemos en la segunda parte de esta memoria.

es holomorfa, por lo menos, en la estrella rectilínea paralela (respecto del punto impropio) cuyos vértices se obtienen sumando cada vértice de la estrella paralela de $f(z)$ con cada vértice de la estrella paralela de $g(z)$», o enunciado en forma más precisa:

a) « la suma de un punto *regular* para $f(z)$ con un punto *regular* para $g(z)$ es un punto *regular* para $h(z)$;

b) la suma de un punto *regular* para $f(z)$ con un punto *singular* para $g(z)$, o bien, la suma de un punto *singular* para $f(z)$ con un punto *regular* para $g(z)$, es un punto *singular* para $h(z)$;

c) la suma de un punto *singular* para $f(z)$ con un punto *singular* para $g(z)$, puede ser o bien *regular* o bien *singular* para $h(z)$ ».

Hacemos algunas aplicaciones de índole aritmética de este teorema logrando demostrar ciertas relaciones que sería difícil obtenerlas *directamente.*

Ahora bien, la importancia que le atribuímos a nuestro criterio fundamental, la hacemos residir en lo siguiente: dicho criterio (necesario y suficiente) es de carácter aritmético, es decir, aparece en él un cierto límite superior y tiene sentido cuando la fórmula que constituye el criterio, se aplica a una función analítica de varias variables complejas independientes; luego, puede tomarse dicho criterio, así generalizado, como definición de *regularidad* o *singularidad* de un punto del hiperespacio para una función de varias variables complejas independientes. Esto es lo que hacemos en la segunda parte del presente trabajo.

El resumen de los resultados que constituyen la segunda parte, así como sus relaciones con los trabajos recientes referentes al mismo tema y bibliografía, lo publicamos en la introducción a la segunda parte.

(*Continuará*)

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

(Continuación)

18. **Sistemas $S_h(m, n)$ totalmente singulares.** Veremos que el estudio de estos sistemas que, como sabemos, (12, IV), son infinitos, se reduce al de los finitos regulares.

Interesa particularmente en éstos, como en todos, obtener los sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$ que contienen, los cuales pueden ser determinados de acuerdo con (16, II). Pero estudiaremos algunas propiedades particulares de estos sistemas.

El caso de que el número m, de sus inecuaciones principales es igual a la característica, h, del sistema, todos los sistemas subordinados de cualquier orden son siempre compatibles, (4, *a*). Como a este caso, (14, II) y (15, II), se reducen los sistemas totalmente singulares unitarios y binarios, solamente interesan los sistemas totalmente singulares de característica $h > 2$. Por esto, cuando hablemos de sistemas totalmente singulares, sin otro agregado, sobreentenderemos que tienen característica mayor que dos.

Diremos que un $S_h(m, n)$, compatible, totalmente singular, *ha sido completado* con una nueva inecuación, cuando el sistema normal compatible $S_h(m+1, n)$, formado con las inecuaciones del sistema dado y esta última, es finito.

Demostraremos que:

I) *Todo* $S_h(m, n)$ *dado compatible totalmente singular, puede ser completado.*

Sea $R_h(\delta)$ un resolvente principal del sistema. Sus ecuaciones son, [7.1], todas homogéneas. Indiquemos con λ_j los coeficientes y con μ el término independiente de la nueva inecuación que debemos agregar para formar el sistema finito $S_h(m+1, n)$.

Vamos a probar que es siempre posible determinar los λ_j y μ y, esto de infinitos modos, tal que el nuevo sistema resulte finito.

Calculemos previamente los coeficientes λ_j con la condición que la matriz del nuevo sistema, $S_h(m+1, n)$, tenga también característica igual a h, lo cual es siempre posible; basta repetir el razonamiento que se hizo en (9, IV), y que los determinantes $\alpha_{m+1,j}$ de orden h de la correspondiente ecuación, en el resolvente principal $R'_h(\delta)$ de $S_h(m+1, n)$, tengan todos el mismo signo que δ. Recordando, (4, b), que éstos son los adjuntos de los elementos de la última columna del orlado de δ con la columna de variables auxiliares X_i y la fila correspondiente a la nueva inecuación de coeficientes λ_j, se tendrá el sistema

$$Sg.\ \alpha_{m+1,j} = Sg.\ \delta .$$

Desarrollando los determinantes $\alpha_{m+1,j}$ respecto de su última fila, se obtiene un sistema normal de h inecuaciones lineales, en las incógnitas λ_j, de característica h, porque los coeficientes de los λ_j, en estas inecuaciones, no son sino los adjuntos de los elementos del determinante principal δ, no nulo. Por lo tanto, (4, a), el sistema de incógnitas λ_j, tiene infinitas soluciones.

Queda por calcular el término independiente μ. Lo determinaremos de manera que el orlado Δ, de δ, con la columna de términos independientes del sistema y los λ_j obtenidos, tenga igual signo que δ, lo cual es siempre posible por cuanto se reduce a resolver una sola inecuación en que la única incógnita es μ.

Así el resolvente $R'_h(\delta)$, del nuevo sistema, tiene su última ecuación no homogénea, con todos sus coeficientes $\alpha_{m+1,j}$ de igual signo que Δ. Todas las variables auxiliares resultan, pues, acotadas y el $S_h(m+1, n)$ es, (12), finito.

Se deduce también que

II) *Ningún determinante orlado de un determinante δ, de orden h, entre cuyas h filas figura la última fila relativa a la inecuación agregada de un $S_h(m, n)$ completado, puede ser nulo.*

En efecto, esto resulta de las relaciones [6.6] entre los determinantes de orden h y los de orden $h+1$; pues, si uno de éstos fuese nulo, como por hipótesis, todos los determinantes de orden $h+1$ de la matriz de $S_h(m, n)$ son nulos, por ser totalmente singular, serían también todos nulos los de orden $h+1$ de la matriz del sistema completado, y, en consecuencia, también $\Delta = 0$, contra lo supuesto. Por lo tanto:

III) *Todo resolvente principal de un sistema completado cuyo determinante principal contenga a la fila de la inecuación agregada, es regular,* pues, (II), ninguno de sus orlados puede ser nulo.

Si en el sistema completado, consideramos el sistema subordinado de primer orden relativo al nuevo polinomio agregado, resulta un sistema compatible, (4, VII), de característica complementaria, (11), $h' = h - 1$. Diremos que este sistema es *una sección completa del sistema dado.* Los determinantes principales de una sección completa son de orden $h - 1$ y sus filas pertenecen, (10, I), a la matriz subordinada de primer orden de la del sistema completado, $S_h\ (m + 1, n)$, relativa a la fila del último polinomio agregado.

IV) *Todos los sistemas subordinados compatibles de orden* $h - 1$, *de un* $S_h\ (m, n)$; *totalmente singular, pertenecen a los resolventes principales de cualquier sección completa del dado* y, recíprocamente, *todos los sistemas subordinados compatibles de orden* $s = h - 1$, *de cualquier resolvente principal de una sección completa del* $S_h\ (m + 1, n)$, *pertenecen al sistema* $S_h\ (m, n)$ *dado.*

Completemos, (I), de cualquier manera, el sistema $S_h\ (m, n)$ totalmente singular dado. Todo resolvente, $R_h(\delta)$, con respecto a un determinante principal, δ, que no contiene a la fila de la nueva inecuación agregada del sistema completado, constará de una sola ecuación no homogénea, la correspondiente a la última inecuación agregada al sistema. Luego, (9, III), los demás determinantes principales del sistema completado, distintos de δ, que contienen a dicha última fila agregada, darán resolventes regulares, (III). Por lo tanto, todos los sistemas subordinados compatibles de orden $h - 1$ del sistema dado pertenecen, (10), a estos resolventes. Recíprocamente, todo sistema subordinado compatible de orden $h - 1$, formado anulando polinomios, excepto el de la inecuación agregada, correspondientes a las filas de un mismo determinante principal de cualquier resolvente, pertenece a un resolvente principal del sistema completado $S_h\ (m + 1, n)$, porque, por definición del sistema completado, ningún determinante orlado de un determinante principal, δ', de orden h que contiene a la fila de la nueva inecuación agregada es nulo. Ahora bien, este sistema subordinado es finito, (12, V), por ser finito el sistema completado, y como es unitario, pues tiene característica complementaria $h' = h - (h - 1) = 1$, pertenece, (16, VI), a otro resolvente principal del sistema, el cual no puede contener a la fila del polinomio no nulo, como resulta del correspondiente resolvente principal. Luego pertenece también a algún re-

solvente cuyo determinante principal de orden h no contiene a la nueva fila agregada, es decir, es un sistema subordinado compatible de orden $h-1$ del $S_h(m, n)$ dado.

Probemos ahora que:

V) *Toda sección completa de un sistema compatible (totalmente singular) es un sistema finito regular.*

Basta recordar que es un sistema subordinado de primer orden del $S_h(m+1, n)$ completado, con respecto a la última fila agregada. Sus resolventes principales, (10), resultan de los del $S_h(m+1, n)$ que contienen a dicha fila, los cuales, por ser regulares, (III), dan también resolventes regulares para la sección completa. De que es un sistema finito, resulta de su definición y de (12), porque todas sus variables auxiliares están acotadas. De que es regular, lo prueba el hecho de tener todos sus resolventes principales regulares.

Es claro que, inversamente,

VI) *Todo sistema finito regular, $S_{h-1}(m, n)$, de característica $h-1 > 1$, es la sección completa de algún sistema, $S_h(m, n)$, compatible, totalmente singular, de característica h.*

En efecto; puesto que $S_{h-1}(m, n)$ es finito, tiene (12, II), resolventes propios y, por lo tanto, (4, *b*), es $m > h-1$. Podemos, entonces, agregar a la matriz de coeficientes del sistema $S_{h-1}(m, n)$, una nueva columna, de modo que se cumplan las dos condiciones siguientes:

a) que la nueva matriz obtenida tenga característica h;

b) que los determinantes de orden $h+1$, de la matriz ampliada de ésta, con la última columna de la matriz ampliada del sistema dado, sean todos nulos.

La posibilidad de satisfacer a estas dos condiciones resulta de observar, simplemente que, (7, III), basta que sean nulos $m-h$ determinantes de orden $h+1$, orlados de un mismo determinante, no nulo, de orden h. Resultan, de tal modo $m-h$ condiciones lineales a las que deben satisfacer los m elementos de la nueva columna, más una nueva condición que consiste en la no anulación de algún determinante de orden h, formado con la nueva columna. En particular, si es $m = h$, se debe satisfacer, a esta única condición.

Todo sistema, $S_h(m, n)$, cuya matriz ampliada, sea la matriz así formada, es totalmente singular, (7, III), compatible, porque, siendo

regular el sistema $S_{h-1}(m, n)$, sección completa suya, todo sistema subordinado, (IV), de orden $s = h - 1$, relativo a cualquier resolvente principal del $S_{h-1}(m, n)$, pertenece al $S_h(m, n)$.

Obs.: El significado geométrico de estas dos operaciones es bien claro: la primera es una *sección* con un hiperplano, la segunda, una *proyección* desde un punto (propio), exterior al espacio E_n de $S_{h-1}(m, n)$.

Si un sistema $S_h(m, n)$ es singular y su grado de singularidad es $g \leqq m - h$, significa, (7), que entre sus resolventes principales existe uno cuyo grado de singularidad también es g.

Si consideramos las $h + g$ inecuaciones de $S_h(m, n)$ que corresponden, en tal resolvente, a g orlados nulos, obtendremos un sistema parcial, $S'_h(h + g, n)$ de $S_h(m, n)$, totalmente singular y también de característica igual a h. Entre este sistema $S'_h(h + g, n)$ y $S_h(m, n)$, resultan las relaciones siguientes:

VII) *Todos los sistemas subordinados compatibles de un sistema* $S'_h(h + g, n)$, *totalmente singular, parcial de un* $S_h(m, n)$ *compatible dado, pertenecen a éste.*

Consideremos el resolvente principal, $R_h(\delta)$ singular de $S_h(m, n)$ que corresponde a las $h + g$ inecuaciones del sistema parcial S'. Todo sistema subordinado compatible de éste satisface a las ecuaciones homogéneas de $R_h(\delta)$, por hipótesis. Si no satisficiese a alguna de las no homogéneas, el sistema parcial del dado que tiene por resolvente principal el formado solamente por las ecuaciones no homogéneas de $R_h(\delta)$, no tendría por sistemas subordinados compatibles a todos los que resulten de anular polinomios de sus variables auxiliares principales, lo cual contradice al (10, I), porque es un resolvente regular. Luego, dichos sistemas compatibles pertenecen a $R_h(\delta)$ y, por lo tanto, son también subordinados compatibles del sistema dado.

Sea ahora $R_h(\delta)$, un resolvente principal singular de un $S_h(m, n)$, de grado g de singularidad. El sistema parcial de éste, formado por los $h + g$ polinomios que corresponden a las g ecuaciones homogéneas de $R_h(\delta)$, [7.1], constituyen un sistema parcial totalmente singular del sistema dado. Los resolventes principales, (IV), de cualquier sección completa de este sistema parcial, contienen todos sus sistemas subordinados compatibles de orden $h - 1$ y, por lo tanto, (VII), pertenecen a ellos todos los del resolvente $R_h(\delta)$ dado.

Dichos resolventes principales, de cualquier sección completa del mencionado sistema parcial, totalmente singular, los llamaremos,

resolventes principales complementarios del $R_h(\delta)$ dado. Ellos tienen determinantes principales de orden $h-1$, que son los de la de matriz fundamental M_{h-1}, correspondiente a la sección completa dada.

Finalmente, en base a las proposiciones (VI) y (VII) de este número y de la (9, III) se puede afirmar que:

VIII) *La condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea principal en un sistema S_h (m, n) compatible, es que su correspondiente fila forme parte de algún determinante principal de orden h del sistema, o de algún determinante principal de orden $h-1$ de toda sección completa del sistema.*

Así, pues, el criterio general prometido en el número (9) para la reducción de un sistema se deduce inmediatamente de esta propiedad:

IX) *Para reducir un $S_h(m, n)$ compatible a sus inecuaciones principales y solamente a ellas si no es totalmente singular, se forman todos los determinantes principales del sistema de orden h, o todos los determinantes principales de orden $h-1$ de cualquier sección completa si es totalmente singular. Las filas que no figuran en ninguno de ellos, corresponden a inecuaciones sobrantes en el sistema, y de este modo se obtienen todas.*

Obs.: Este teorema y el que le precede, permiten reducir el estudio de los sistemas totalmente singulares al de sistemas regulares. Así, todos sus sistemas subordinados compatibles de orden $h-1$ se obtienen tomando cualquier *sección completa* del mismo; los grupos de polinomios correspondientes a las filas de todos los determinantes principales de ésta, que son de orden $h-1$, dan todos los sistemas compatibles subordinados de orden $h-1$ del sistema dado. Y es claro que el número de éstos no depende de la sección completa que se considere porque la fila de ésta no forma parte de su correspondiente matriz fundamental, M_{h-1}, ni del resolvente principal que se tome porque, (7, III), todos ellos tienen el máximo grado de singularidad.

19. **Sistemas subordinados contiguos.** Diremos que dos sistemas subordinados de primer orden de un mismo sistema S_h (m, n), no unitario, son *contiguos* en éste, si contienen un mismo sistema subordinado de segundo orden compatible común, el cual se llama *intersección* de aquéllos.

La existencia, en todo $S_h(m, n)$ compatible, no reducible a una sola inecuación, de sistemas subordinados contiguos, resulta del teorema siguiente:

I) *En un sistema no unitario compatible, cada par de sistemas subordinados de primer orden correspondientes a las filas de un mismo deter-*

minante principal de un resolvente, si es regular, o de un mismo determinante principal de un resolvente complementario, si es singular, constituyen sistemas subordinados contiguos.

Esta propiedad no es sino consecuencia inmediata de (10, II) porque los resolventes complementarios de un resolvente singular, (18, VI), son regulares, por ser los de una sección completa. Ella vale, naturalmente, para el caso (4, *a*), es decir, de un sistema con resolvente impropio, en cuyo caso es también inmediata.

Recíproco:

II) *Si dos sistemas subordinados compatibles de primer orden son contiguos en un* S_h (m, n) *no unitario, sus polinomios nulos corresponden a las filas de un mismo determinante principal de un resolvente del sistema.*

En efecto; puesto que son contiguos, sus respectivos polinomios tienen ceros comunes que satisfacen a todas las demás inecuaciones, o sea que su *intersección* es un sistema subordinado compatible de segundo orden del dado, por lo tanto, (10, VII), las variables auxiliares de ambos polinomios son paramétricas de un mismo resolvente principal del sistema. En consecuencia, las filas correspondientes forman parte del determinante principal de éste si es regular y si es singular, forman parte, (18, VIII), de los determinantes de orden inmediato inferior, de los correspondientes resolventes principales complementarios.

En el caso (4, *a*) de resolvente impropio la proposición es inmediata. En particular:

III) *En todo* S_h (m, n) *no unitario compatible, no reducible a una sola inecuación, cada sistema subordinado compatible de primer orden tiene, por lo menos, un sistema subordinado de primer orden contiguo a él en* $S_h(m, n)$; pues basta considerar, (10, VI), un resolvente principal del $S_h(m, n)$, en el cual sea paramétrica la variable auxiliar del polinomio correspondiente al sistema subordinado dado.

En resumen:

IV) *La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas subordinados sean contiguos en un* S_h (m, n) *no unitario, es que las filas que corresponden a ambos polinomios nulos, pertenezcan al mismo determinante de un resolvente principal, o de un resolvente principal complementario, en el sistema considerado.*

Es inmediato que:

V) *La intersección, en un* S_h (m, n) *finito, de dos sistemas subordinados contiguos es un sistema finito,* puesto que, (12, V), es también un sistema subordinado compatible del S_h (m, n) dado.

Obs.: Nótese que, en un sistema infinito, puede haber *intersecciones* de sistemas subordinados contiguos, finitas e infinitas.

20. **Determinación de figuras poliédricas convexas.** En los números (7) y (11) nos hemos ocupado de algunas propiedades de los resolventes y hemos visto que ellos determinan la figura del correspondiente sistema y de todos los sistemas iguales a él. En una palabra, una figura poliédrica convexa está, pues, determinada por una expresión del tipo [7.1]; es decir, un resolvente, $R_h(\delta)$, principal de sistemas $S_h(m, n)$, en el cual, (4), el número h, de sus variables auxiliares paramétricas es, precisamente, la característica de todos los $S_h(m, n)$ que tienen dicho resolvente.

Hemos visto también, (7), que un $R_h(\delta)$ está dado cuando se dan los coeficientes y términos independientes de sus $m-h$ ecuaciones que son, (11), en número de $(h+1)(m-h)+1$.

En (7, VI, VII) hemos demostrado también el teorema fundamental siguiente:

I) *Dado arbitrariamente un sistema resolvente, $R_h(\delta)$, principal, existen infinitos sistemas, $S_h(m, n)$, compatibles, uno de cuyos resolventes principales, es el $R_h(\delta)$.*

Pero, dada su importancia, daremos ahora, una demostración más detallada del mismo teorema.

Observemos que para $h = 0$, en el $R_h(\delta)$ considerado, todas las variables auxiliares son constantes no negativas. Al $R_h(\delta)$ así dado corresponden infinitos sistemas idénticos. La figura de todos ellos es, (8), todo el espacio.

Para $h \neq 0$, se deben satisfacer relaciones de la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & \dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} \end{vmatrix} = \delta \neq 0 , \qquad [20.1]$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & \dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} \\ a_{r1} & \dots & a_{rh} \end{vmatrix} = \alpha_{ri} \qquad [20.2]$$

$$\begin{pmatrix} r = h+1, h+2, \dots, m-h \\ i = 1, 2, 3, \dots, h) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & c_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2h} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} & c_h \\ a_{h+r,1} & \dots & a_{h+r,h} & c_{h+r} \end{vmatrix} = \Delta_r \qquad [20.3]$$

$$(r = h+1, h+2, \dots, m-h)$$

indicando con $\| a_{ij}, c_i \|$, la matriz ampliada de los sistemas incógnitos $S_h(m, n)$ compatibles de característica h y de dimensión también prefijada, $n \geqq h$.

Es claro que para ello será suficiente probar la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones [20.1], [20.2] y [20.3], con lo cual se obtendrán los $S_h(m, h)$ compatibles de dimensión h. Para obtener, después, sistemas de dimensión $n > h$, bastará ampliar las matrices de aquéllos, con $n - h$ nuevas columnas, de modo que sean combinaciones lineales de algunas o de todas las h columnas calculadas.

En [20.1], fijemos arbitrariamente valores a todos los elementos del determinante del primer miembro, excepto al elemento a_{hh}, con la condición de que el adjunto de este último elemento no sea nulo. Como está dado δ, resulta así calculado también a_{hh}.

El primer miembro de [20.2], es un determinante de orden h, en el cual, $(4, b)$, falta la fila i, siendo su última fila una de rango $r > h$. Por lo tanto, están determinados todos sus elementos, excepto los de la última fila r.

Para cada r fijo, e i variable, desde 1 hasta h, se obtiene un sistema lineal de h ecuaciones con h incógnitas cuya característica es h, porque sus coeficientes no son otra cosa que los adjuntos de los elementos del determinante del primer miembro de la [20.1], el cual no es nulo por ser igual a δ, determinante principal del $R_h(\delta)$, dado. Así, pues, los $m - h \geqq 0$ sistemas lineales que así resultan, son todos compatibles con solución única, aun cuando alguno de estos sistemas sea homogéneo; en cuyo caso la solución es la nula. De este modo quedan determinados todos los coeficientes a_{ij}, en función de los $h^2 - 1$ elementos arbitrarios de la [20.1].

En cuanto a la [20.3], resulta inmediatamente, asignando valores arbitrarios a los h primeros términos independientes, $c_1, c_2, \ldots, c_h$, y observando que de ese modo queda perfectamente determinado c_{h+r}, porque, en el desarrollo del determinante del primer miembro de dicha relación, con respecto a la última columna, el coeficiente de c_{h+r} es el determinante δ, no nulo, por hipótesis.

El teorema de existencia, está pues, demostrado, porque todos los $S_h(m, n)$, así obtenidos, tienen un mismo resolvente principal que es el $R_h(\delta)$, dado; son, por lo tanto, compatibles.

En virtud de las relaciones [6.3] y [6.6], quedan determinados todos los demás determinantes de orden h y de orden $h + 1$, de dichos sistemas y, en consecuencia, (4), también los demás resolventes.

Así, como un sistema, $S_h(m, n)$, compatible, define una *región*

poliédrica convexa del espacio E_n, un sistema, $R_h(\delta)$, resolvente principal, define una *figura poliédrica convexa* de E_n.

Las propiedades de la figura, resultan, por lo tanto, del $R_h(\delta)$ que la define, las cuales han sido establecidas en los números precedentes.

Una figura poliédrica convexa, se dirá *regular, singular,* o *totalmente singular,* según que los correspondientes sistemas, $S_h(m, n)$, que pertenecen a ellas sean, (7), respectivamente, regulares, singulares, o totalmente singulares.

Una figura se llama *cerrada,* si los $S_h(m, n)$ que le pertenecen, (12), son acotados; *abierta,* en caso contrario.

De las expresiones [5.1] del número (5), se deduce que:

II) *En el espacio arguesiano, E'_h, de h dimensiones, toda figura convexa h-dimensional es cerrada.*

De aquí se deduce que el estudio de las figuras de los sistemas $S_h(m, n)$, en el espacio euclídeo, E_n, cerradas y abiertas, puede ser reducido al estudio de figuras cerradas en el espacio arguesiano E'_n, que contiene al E_n, puesto que basta, (8), referirse al espacio de pertenencia de la figura.

Obs.: Es claro que, en la determinación de una *región poliédrica convexa* dada por un $S_h(m, n)$, intervienen todos los coeficientes y términos independientes de las inecuaciones del sistema. En cambio, la *figura* está determinada por los determinantes de orden h y de orden $h + 1$. En el capítulo siguiente veremos que si solamente se prefijan los signos de estos determinantes y los valores nulos, es posible obtener, en función de éstos, un nuevo invariante que define la *forma* de las figuras convexas. Así, pues, este último concepto geométrico resultará de una doble abstracción de los elementos que definen un $S_h(m, n)$.

Se verá, de este modo, que toda propiedad *morfológica* de tales figuras, quedará reducida a una cuestión de *ceros* y de *signos* de los determinantes de la matriz ampliada del sistema.

Ejemplo 1:

Estudiemos, como ejemplo, la figura que corresponde al $R_h(\delta)$ principal, dado por

$$\begin{cases} (123)X_4 - (124)X_3 + (134)X_2 - (234)X_1 = (1234) \\ (123)X_5 - (125)X_3 + (135)X_2 - (235)X_1 = (1235). \end{cases}$$

Pongamos:

$$(123) = 1;\ (124) = 1;\ (125) = -1;\ (134) = 1;\ (135) = -1,$$
$$(234) = 1;\ (235) = -1;\ (1234) = 1;\ (1235) = 1.$$

Resulta así:

$$\begin{cases} X_4 - X_3 + X_2 - X_1 = 1 \\ X_5 + X_3 - X_2 + X_1 = 1. \end{cases} \qquad [\alpha]$$

De las relaciones [6.3], véase el ejemplo del número (6), resultan los otros tres determinantes de tercer orden:

$$(145) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad (245) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad (345) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

En cuanto a los otros tres determinantes de cuarto orden se calculan utilizando la [6.6]. Se tiene:

$$(123)\ (1245) = \begin{vmatrix} (124) & (1234) \\ (125) & (1235) \end{vmatrix} \quad ; \quad (1245) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad ;$$

$$(123)\ (1345) = \begin{vmatrix} (134) & (1234) \\ (135) & (1235) \end{vmatrix} \quad ; \quad (1345) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad ;$$

$$(123)\ (1234) = \begin{vmatrix} (234) & (1234) \\ (235) & (1235) \end{vmatrix} \quad ; \quad (2345) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 .$$

De estas relaciones se deduce que (125), (134) y (235) son también determinantes principales.

En efecto es:

$$\text{Sg. } (125) = \text{Sg. } (1253) = \text{Sg. } (1254).$$

$$\text{Sg. } (134) = \text{Sg. } (1342) = \text{Sg. } (1345).$$

$$\text{Sg. } (235) = \text{Sg. } (2351) = \text{Sg. } (2354).$$

Por lo tanto, los determinantes (123), (125), (134) y (235), son los únicos principales que admiten todos los $S_3(5, n)$ que tienen el dado resolvente principal.

Del sistema [α], se deduce fácilmente que el sistema subordinado de primer orden, en el cual es $X_2 = 0$, tiene figura triangular acotada, (12, I), pues es

$$\begin{cases} X_4 - X_3 - X_1 = 1 \\ X_5 + X_3 + X_1 = 1 \\ X_2 = 0, \end{cases}$$

donde, en virtud de (9, I), la inecuación correspondiente a la X_4 es sobrante; luego el sistema precedente se reduce a

$$\begin{cases} X_5 + X_3 + X_1 = 1 \\ X_2 = 0. \end{cases}$$

Una figura convexa del E_3 que responde a dicho resolvente, es la siguiente:

Pentaedro de tres dimensiones.

De igual modo se pueden estudiar todos los demás elementos de la figura: *vértices, aristas, caras.*

Si se quiere obtener una particular región de E_3 que tenga esta figura, bastará aplicar el teorema (I) de este número y calcular los coeficientes de un sistema $S_3(5, 3)$.

Ejemplo 2:

He aquí un ejemplo de una figura convexa de un espacio de *cinco dimensiones.* Sea:

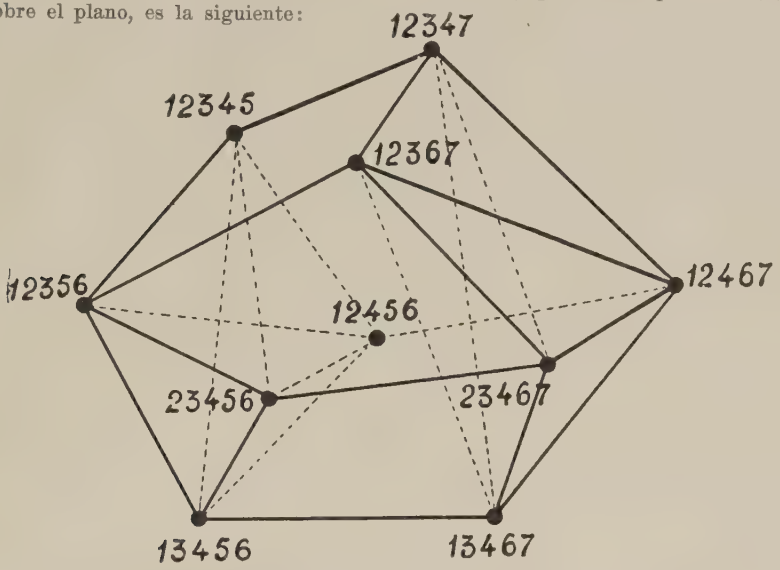
$$\begin{cases} X_6 + X_5 + X_4 + X_3 + X_2 + X_1 = 2 \\ X_7 + X_5 - X_4 \qquad\qquad\qquad\quad = 1. \end{cases}$$

Con el procedimiento indicado, hemos obtenido los siguientes determinantes principales:

(12345); (12347); (12356); (12367); (12456); (12467); (13456); (13467); (23456); (23467), que son los únicos que gozan de tal propiedad para todo $S_5(7, n)$ de E_n cuyo resolvente es el dado.

Cada uno de estos determinantes corresponde a un *vértice* de toda región, $S_5(7, 5)$ de E_5.

La proyección de dicho hiperpoliedro, o *politopo*, que es un *eptaedro* de E_5, sobre el plano, es la siguiente:



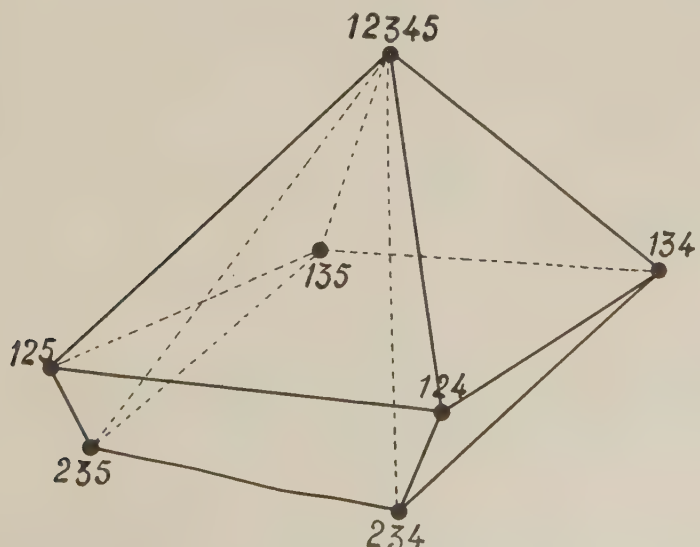
Eptaedro de cinco dimensiones.

Las caras son hiperpoliedros o politopos de cuatro dimensiones. Por ejemplo, la cara [1], es el exaedro tetradimensional cuyos vértices son:
(12345); (12347); (12356); (12367); (12456); (12467); (13456); (13467).

Una cara de éste, es el pentaedro tridimensional formado por los vértices:
(12345); (12347); (12356); (12367); (12456); (12467), como se reconoce inmediatamente en la representación adjunta.

Ejemplo 3: Pongamos, ahora, el caso de un sistema totalmente singular.
Sea, como antes: $X_5 + X_4 - X_3 - X_2 - X_1 = 0$.

Una sección completa de esta figura de E_4 que es una *pirámide pentagonal de cuatro dimensiones*, tiene por vértices:
(124); (125); (134); (135); (234); (235). Pentaedro de tres dimensiones:



Pirámide pentagonal de cuatro dimensiones y su sección completa.

Notemos, finalmente, que si se adoptan por hiperplanos coordenados de un sistema cartesiano oblicuo de un espacio de h dimensiones, las h variables auxiliares paramétricas no negativas de un $R_h(\delta)$, éste puede ser considerado como un *sistema de ecuaciones intrínsecas de la figura,* puesto que ella resulta referida a h caras suyas. Los ejes coordenados son las $\binom{h}{h-1} = h$ aristas que corresponden al vértice formado por las h caras y el origen es este mismo punto.

En esta representación las X_i, son, pues, hiperplanos variables. Cada uno de éstos queda perfectamente determinado por sus h puntos de intersección con los ejes del sistema.

Al estudiar las figuras poliédricas convexas definidas por sistemas resolventes, $R_h(\delta)$, [7.1], será conveniente eliminar de éstos las variables auxiliares, X_i, que, eventualmente, puedan corresponder, en los $S_h(m, n)$, que tienen tales resolventes, a inecuaciones sobrantes.

Si el $R_h(\delta)$ no corresponde a sistemas idénticos, dos casos, solamente, son posibles. O bien el $R_h(\delta)$ se reduce a sus h variables auxiliares paramétricas, o bien el $R_h(\delta)$ contiene otras variables auxiliares principales. En el primer caso, todos los sistemas correspondientes tienen resolvente impropio y característica h. En el segundo, resultan con resolvente propio.

Recordemos que, de este modo, sólo se estudian las propiedades de las figuras poliédricas convexas que son invariantes en las transformaciones lineales enteras de módulo no nulo. Agregando nuevas condiciones, se pueden estudiar las propiedades de semejanza y las homotéticas. En particular, si se cumplen las condiciones (9, VI), resultan los movimientos y los pseudomovimientos.

Obs.: Nótese que, en el estudio de los movimientos y pseudomovimientos, si se cumplen las condiciones (9, VI), puede prescindirse también, completamente, de las incógnitas no principales. Pues es posible transformar ortogonalmente tal sistema en otro, de modo que en el transformado no figuren dichas incógnitas, utilizando, para ello, el grado de arbitrariedad de las sustituciones ortogonales entre n variables independientes, el cual vale (1)

$$\frac{n\,(n-1)}{2}.$$

(1) Véase A. Voss: *Zur Theorie der Orthogonalen Substitutionen,* en Mathematische Annalen. Tomo XIII (1878), pág. 320. En las páginas 350 y siguientes se encuentran, efectivamente, calculados los coeficientes de la sustitución en función de los respectivos parámetros independientes.

(Continuará)

SOBRE LA CORRELACIÓN ENTRE LA RADIACION SOLAR Y LA PRESIÓN EN VALDIVIA (CHILE)

Por EMILIO L. DIAZ

SUMARY

This work in order to find the influnce of the different stations of the year on solar-pressure correlation at Valdivia (Chile), the autor show a positive coefficient for days numbers 0, 1, 2 and 3 in Summer; in Autumn positive for o and 1st. days and negative in 2nd. and 3st.; in Winter is positive for the day 0, and negative in 1st. and 2nd.; and in Spring the effect is likely as Summer.

The study is based on 335 correlationed values, arranged in six years (1930 to 1936).

A fin de estudiar las variaciones que en la correlación entre la radiación solar y la presión en Valdivia (Chile), latitud 40° S., y longitud 73° W. aproximadamente, ejercen las distintas estaciones del año, hemos seleccionado una serie de períodos de tiempo, repartidos en los seis años que van desde 1931 a 1936, para los cuales los valores de la radiación y la presión venían dados con una secuencia tal que evitaba interpolaciones.

Para la radiación del Sol hemos empleado los valores determinados por la Smithsonian Institution; a éstos y a los de la presión se les aplicó la fórmula

$$y_{ap} = \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}$$

y se determinó la curva eje

$$y_{eje} = \frac{\overset{5}{\underset{1}{\Sigma}} y}{5}$$

determinada la onda meteorológica se aplicó el cálculo de correlación; los resultados hallados están en el cuadro que sigue:

Cuadro de coeficientes de correlación calculados entre la radiación solar y la presión en Valdivia

Fechas	Coeficientes de correlación					
	0 día	1 día	2 días	3 días	P. med.	N
1931						
Marzo 8 á Abril 5. . .	0.52	0.24	—0.47	—0.50	63.2	23
Sept. 24 á Octubre 5 .	0.63	0.43	—0.16	—0.46	62.8	8
Noviembre 8 á Nov. 19	—0.62	0.31	0.90	0.08	62.6	8
Noviembre 26 á Dic. 13	0.65	0.31	—0.40	—0.15	61.7	14
1932						
Julio 30 á Agosto 17. .	0.42	—0.01	—0.34	0.06	61.9	15
Agosto 31 á Sept. 9 . .	0.52	0.74	0.04	—0.33	64.4	6
1933						
Febrero 16 á Feb. 27 .	—0.38	0.42	0.60	0.05	60.0	8
Junio 9 á Julio 3 . . .	0.34	—0.03	—0.19	—0.13	62.7	21
Septiembre 5 á Sept. 28	0.40	—0.13	—0.13	0.03	63.5	20
Octubre 13 á Octubre 27	0.21	0.52	—0.25	—0.47	62.1	12
1934						
Mayo 29 á Junio 14 .	0.75	0.64	0.07	—0.40	55.9	12
Julio 3 á Julio 17 . . .	0.54	0.00	—0.29	0.00	65.7	9
Septiembre 1 á Sept. 30	—0.33	0.52	0.32	—0.20	65.2	17
Enero 21 á Febrero 4 .	—0.36	0.16	0.76	0.29	61.8	9
Enero 2 á Enero 20 . .	0.28	0.25	—0.60	—0.17	61.5	14
1935						
Junio 27 á Julio 16 . .	—0.04	—0.63	—0.09	0.18	59.7	14
Agosto 9 á Septiembre 7	0.39	—0.48	—0.29	0.25	62.7	25
Octubre 11 á Nov. 7 .	—0.15	0.22	0.12	—0.10	64.3	20
Noviembre 11 á Nov. 30	0.42	0.20	—0.25	0.05	62.0	15
1936						
Febrero 29 á Marzo 31	0.12	0.29	—0.21	—0.42	61.4	27
Abril 21 á Mayo 9 . .	0.13	0.45	0.15	—0.23	60.9	14
Mayo 17 á Mayo 31 .	—0.03	0.23	—0.37	—0.10	57.5	10
Junio 2 á Junio 20 . .	0.29	—0.38	—0.20	0.21	59.5	14
Promedios	0.204	0.186	—0.056	—0.107	61.9	
					Suma	335

Si se agrupan los períodos de tiempo para los cuales se ha determinado el coeficiente de correlación, por épocas del año, y se hacen los promedios, se tendrá:

Valores de los coeficientes por estación y por defasaje

Diciembre, Enero y Febrero		Marzo, Abril y Mayo	
0 día	0.047	0 días	0.185
1 día	0.285	1 día	0.302
2 días	0.090	2 días	—0.225
3 días	0.000	3 días	—0.312
presión media	761.2	presión media	760.8
N° de valores	45	N° de valores	74

Junio, Julio y Agosto		Septiembre, Octubre y Noviembre	
0 días	0.324	0 días	0.135
1 día	—0.304	1 día	0.351
2 días	—0.233	2 días	0.074
3 días	0.095	3 días	—0.175
presión media	762.1	presión media	763.3
N° de valores	83	N° de valores	160

En este cuadro se pueden observar los siguientes hechos:

1º en Verano se tendrá correlación positiva los cuatro primeros días;

2º en Otoño en los dos últimos días se observará correlación negativa, es decir que un máximo de radiación irá seguido de otro de presión entre los días 0 y 1, y por un mínimo entre los días 2 y 3;

3º en Invierno, el máximo de presión será simultáneo con el de radiación, y en los días 1 y 2 observaremos un mínimo barométrico;

4º en Primavera el resultado será parecido al encontrado para el Verano, con la salvedad de que habrá ya correlación negativa en el tercer día.

Como se ve, las diferentes estaciones modifican en forma notable los efectos que la variación de la radiación del sol ejerce sobre la presión en Valdivia.

Puerto Belgrano, Septiembre de 1936

DESCRIPCION DE ICNEUMONOIDEOS ARGENTINOS

Por el entomólogo EVERARD E. BLANCHARD (1)

Austrodolops n. g.

Genotipo, A. eremitae, n. sp.

Este género se coloca cerca de *Dolops* Marshall de la tribu *Diospilini* distinguiéndose por la primera sección de la *R* subigual a la segunda; la segunda nervadura cúbito-transversa no pigmentada; nervulus postfurcal; suturas abdominales distintas; propodeo rugoso y no completamente aereolado y por otros caracteres descriptos a continuación.

Austrodolops eremitae, n. sp.

Hembra: Ocráceo ferruginoso, algo pardusco, sobre todo las patas y el dorso abdominal; palpos ennegrecidos. Alas apenas ahumadas con reflejos iridescentes; nervaduras pálido-pardusca; Cu_1, *m-cu*, *M*, parastigma, *Cu* y primera sección costal más obscuras; R_4 sin pigmentación; estigma más claro y amarillento en el ángulo interno. Oviscapto con vaina negra y taladro testáceo, el extremo apical de éste, ennegrecido.

Cabeza tan ancha como el tórax, finamente rugoso-puntuado y con escasos pelitos blanquecinos. Frente con una prominencia longitudinal mediana liso luciente que corre desde la sutura clipeal hasta la altura de las antenas. Sienes y vértice separados del occipucio por una carena delgada pero aguda. Ocelos posteriores separados por el $^1/_3$ de la distancia que los separa de las órbitas. Ojos pequeños, $1^1/_2$ veces más largos que anchos y apenas más anchos que las sienes. Palpos maxilares de seis artejos; los labiales de cuatro. Flagelo antenal compuesto de 22 segmentos. Mandíbulas bidentadas.

Tórax finamente reticulado; los surcos parapsidales y región mediana pre-escutelar con rugosidades gruesas. Surco pre-escutelar

(1) División de Zoología Agrícola, Ministerio de Agricultura de la Nación.

con 7-8 fosas alargadas. Escutelo finamente micro-reticulado; impresiones laterales con arrugas transversas completas como también las impresiones laterales del metanoto. Propodeo gruesamente rugoso-puntuado con una carena mediana longitudinal basal que forma una continuación de la carena mediana del metanoto; y que se bifurca en el $^1/_4$ basal del propodeo extendiéndose en dos ramas oblicuas; el $^1/_3$ basal del propodeo micro-puntuado a cada lado de la carena mediana y apenas vermiculado; puntuación lateral del propodeo gruesa y rugosa y con abundantes pelitos blanquecinos.

Nervulación alar indicada en la figura 1. Patas normales. Tibias de las patas anteriores e intermedias con 7-9 espinitas cortas, gruesas y cónicas.

Primer tergito del abdomen fuertemente estríado en sentido longitudinal; región mediano dorso-basal más o menos liso y delimitado por carenas que convergen hacia el borde caudal y que terminan más o menos en la primera mitad del tergito; carenas laterales diferenciadas. Segundo tergito con estrías longitudinales decididamente más finas. Demás tergitos micro-puntuados y con una serie transversa preapical de cerditas erguidas amarillentas. Oviscapto un poco más que la mitad del largo del cuerpo.

Medidas relativas

Cuerpo	3.00
Antena:	
Largo	2.50
Escapo	0.12
Pedicelo	0.07
Flagelo I	0.15
» II	0.14
» III	0.14
Palpos maxilares: I	0.03
» » II	0.04
» » III	0.10
» » IV	0.09
» » V	0.07
» » VI	0.07
» labiales: I	0.04
» » II	0.05
» » III	0.04
» » IV	0.05
Ala anterior	2.00 × 0.65
Ala posterior	1.70 × 0.36
Pata posterior:	
Fémur	0.65
Tibia	0.70
» Espolones	0.05 y 0.08
Basitarso	0.19
Tarso II	0 12
» III	0.10
» IV	0.07
» V	0.11
Oviscapto	1.90

Macho: Parecido a la hembra, pero con sólo 20 segmentos en el flagelo antenal.

Habitat: Parásito de la oruga de *Cecidoses eremita,* Curtis, criado por el señor Luis De Santis, La Plata (X-1935).

Cotipos: Una hembra y dos machos en la colección del autor.

FIG. 1. — *Austrodolops eremitae,* n. sp. ♀: *a*, ala anterior; *b*, ala posterior; c, tibia intermedia; *e*, antena, segmentos proximales y distales; *f*, palpo maxilar.

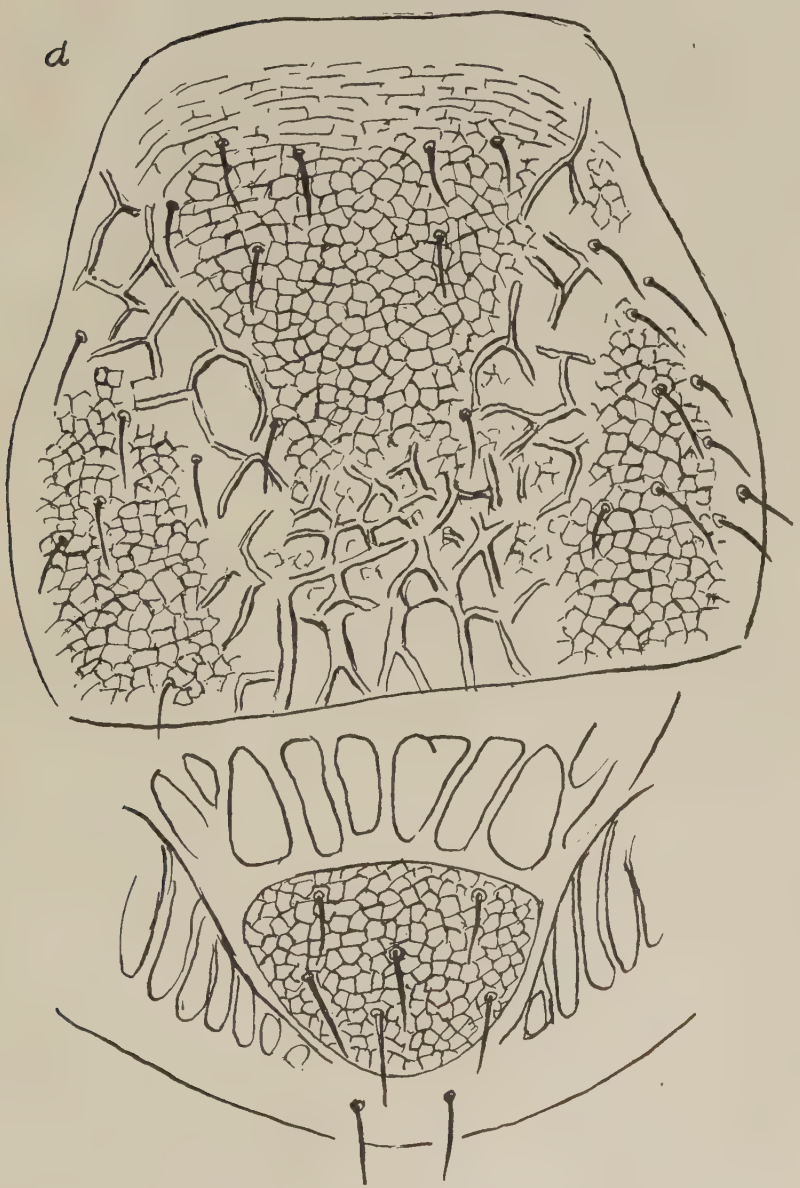


FIG. 2. — *Austrodolops eremitae*, n. sp. ♀: *d*, escultura del mesonoto y del escutelo.

Calliephialtes argentinus n. sp.

Hembra: Cabeza completamente negra. Antenas pardo-negruzcas con el anillo amarillento. Palpos blanquecinos. Tórax, con excepción del proepisterno negro, de color uniforme pardo-testáceo o castaño-testáceo o rojizo; los costados más claro y el dorso más o menos ennegrecido. Patas anteriores y medianas amarillentas o testáceo-amarillentas con las uñas negras. Patas posteriores pardo-negruzcas, con el segundo tercio de las tibias y base del basitarso un poco más pálidos. Espolones tibiales amarillentos. Alas hialinas, un poco iridescentes; nervaduras parduscas, la costal y margen anterior del estigma negro mate y el metacarpo claro amarillento en la base, poco a poco oscureciéndose hasta su ápice. Paratégulas blanquecinas. Abdomen testácea-pardusco, los últimos tres segmentos y el primero más o menos ennegrecidos. Cercas y vaina negruzcas; taladro castaño oscuro.

Cabeza lisa luciente con escasos pelitos finísimos blanquecinos en el frente debajo de las antenas, en la mitad posterior de las sienes y entre los ocelos y las órbitas. Clipeo fuertemente recortado en el medio de su margen apical. Espacio malar muy estrecho y microreticulado y mate. Distancia entre los ocelos posteriores subigual a dos veces la que los separan del ocelo anterior. Antenas provistas de anillo corto; largo ventral del pedicelo subigual a dos veces el largo dorsal.

Tórax con el dorso del mesotórax y escutelo liso luciente; surcos parapsidales débilmente marcados y cortos. Sutura pre-escutelar y las impresiones laterales escuterales sin arrugas. Impresión lateral del metanoto con arrugas pequeñas muy débiles. Proepisterno medianamente provisto de puntuaciones pilíferas; lóbulos protorácicos liso lucientes. Propodeo liso luciente con escasos pelitos blanquecinos, los dorsales cortos y los laterales más largos; carena del borde caudal con una carena corta perpendicular en cada ángulo lateral que se pierde en el cuarto caudal del propodeo; a cada lado de éstas una fuerte impresión y otra lateral pequeña cerca del ápice ventral de la carena caudal. La sutura espiracular termina un poco anterior al espiráculo. Mesopleuras liso lucientes con escasos pelitos blanquecinos. Sutura del prepecto fina, terminando lejos del borde dorsal de la mesopleura. La nervulación alar está indicada en la figura 3.

Tergitos II, III, IV y V del abdomen con una impresión ancha transversal subapical, borrada en el mediano, que se extiende sobre

los costados del tergito en dirección cefálica. Tergitos I y V medianamente puntuados, las puntuaciones más gruesas en el II; más finas en el III y IV y casi microscópicas en el V. Cercas un poco salientes.

Medidas relativas

Cuerpo	7-8.50
Antena:	
Largo	6.00
Escapo	0.25
Pedicelo: largo dorsal	0.10
» largo ventral	0.20
Anillo	0.05
Flagelo: I	0.45
» II	0.35
» III	0.32
Ala anterior	7.50 × 2.35
Ala posterior	5.00 × 1.65
Cabeza:	
Ancho	1.37
Frente	0.65
Tórax	2.40
Abdomen	5.30
Segmento I	0.75 × 0.87
» II	1.10 × 1.20
» III	0.90 × 1.10
» IV	0.75 × 1.05
» V	0.60 × 1.05
» VI	0.50 × 1.05
» VII	0.44 × 0.95
» VIII	0.25 × 0.60
Oviscapto	8.50
Patas posteriores:	
Femures	1.50
Tibias	2.00
Espolones	0.25
Basitarso	0.95
Tarso II	0.35
» III	0.20
» IV	0.01
» V	0.30

Macho: Se diferencia de la hembra principalmente por el colorido del abdomen. Este es negruzco con una faja basal transversa clara amarillenta en los tergitos II, III, IV y V y con las impresiones transversales subapicales a veces algo rojo-testáceas. Por otra parte el primer tergito presenta el disco mediano cóncavo y las impresiones laterales son fuertes. Además el macho es más intensamente puntuado, las puntuaciones pilíferas del abdomen llegan hasta el último tergito y, por último, el aspecto ventral del escapo y pedicelo es de color amarillo claro.

Habitat: Parásito de la oruga de *Laspeyresia molesta* Busck, criado por el Ing. Ubaldo López Cristóbal, Dolores, provincia de Buenos Aires (IV-1936).

Cotipos: Tres hembras y cuatro machos en la colección del autor.

Observaciones: Esta especie se coloca cerca de *Calliephialtes grapholithae* (Cresson) de la cual se distingue por su menor tamaño, por su cabeza completamente negra y por el color uniforme del tórax y el propodeo.

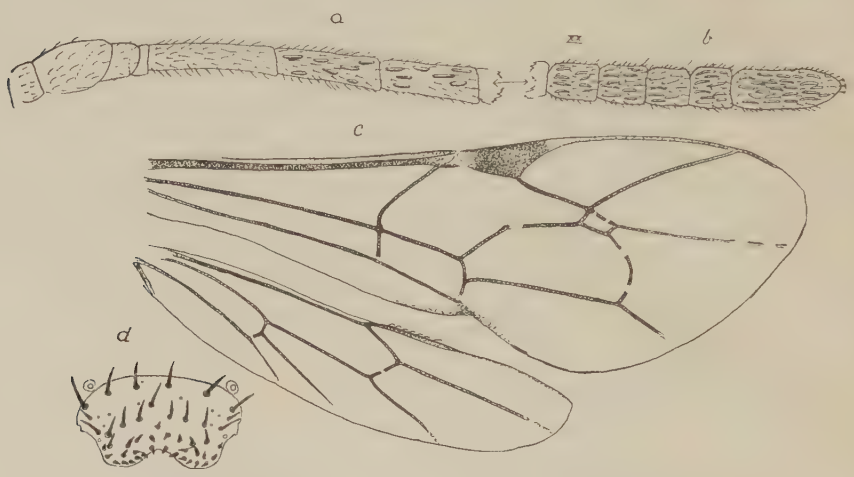


FIG. 3. — *Calliephialtes argentinus*, n. sp. ♀: *a*, antena, segmentos proximales; *b*, antena, segmentos distales; *c*, nervulación alar; *d*, clipeo.

Parapechthis n. g.

Genotipo, P. bazani, n. sp.

Cerca de *Apechthis* (Foerster), del cual se distingue por la cara tan o más ancha que larga, antenas no engrosadas cerca del ápice, y por el escutelo decididamente convexo. Para los demás caracteres, véase la descripción del genotipo.

Parapechthis bazani, n. sp.

Hembra: Amarilla con manchas y fajas negras. Cabeza amarillo claro; ápices de las mandíbulas, una mancha pequeña transversa supra-antenal, triángulo ocelar que se halla unido a la mancha supra-antenal por su ángulo anterior, occipucio y una línea mediana angosta entre éste y el triángulo ocelar, negros. Antenas ferruginosas, pardo-negruzcas por arriba; radícula y aspecto ventral del escapo amarillo claro. Tórax amarillo; mesonoto con tres fajas anchas longitudinales sub-paralelas que terminan en una mancha transversal pre-escutelar, sutura marginal mesonotal, margen anterior del me-

sosterno y mesopleura, episternaulos, una mancha ventral entre las coxas intermedias y las posteriores, una mancha en la raíz del ala anterior, margen anterior y ventral de las metapleuras, impresión lateral del escutelo, borde anterior y posterior del metanoto y lado posterior de la impresión lateral del mismo, dos líneas sinuosas simétricas longitudinales submedianas en el dorso del propodeo y una manchita alargada mediana entre éstas, negros. Patas amarillentas sub-testáceas con uñas negras. Alas hialinas, ligeramente teñidas; estigma amarillo-testáceo a veces anaranjado; nervaduras parduscas. Abdomen amarillento sub-testáceo; bordes distales de los segmentos estrechamente oscurecidos; primer tergito con una mancha alargada mediana que llega hasta el $^1/_3$ distal; segundo tergito con una mancha ancha mediana en la $^1/_2$ basal; tercer tergito con una mancha transversa sub-basal en cada lado del mediano; cuarto tergito con una faja transversal ancha sobre los $^2/_3$ basales; quinto y sexto tergito casi totalmente cubiertos por la faja basal transversa que llega a su mayor longitud en el mediano; séptimo tergito con faja transversa en la mitad basal y una mancha pequeña mediana que une la faja basal con el borde apical; últimos tergitos amarillos. Oviscapto con vaina negruzca y taladro de color rojo caoba oscuro; cercas amarillentas.

Cabeza transversa; borde interno de los ojos perceptiblemente recortado a la altura de las antenas. Clipeo excavado en la mitad distal, formando ángulo con el labro. Frente, vértice y sienes, liso-lucientes con escasos pelitos leonados. Sienes perceptiblemente más cortas que los ojos; éstos desnudos. Espacio malar corto, sub-igual a la distancia entre los forámenes clipeales y el borde ocular. Escapo con micropuntuación pilífera; primer segmento del flagelo $1^1/_2$ veces el largo del segundo; el flagelo compuesto de 24 segmentos. Placa ocelar con una impresión mediana entre los ocelos posteriores que llega hasta la carena occipital; ocelos posteriores separados por una distancia sub-igual a la que los separa del borde ocular.

Tórax con puntuación débil y pelitos leonados cortos en el mesonoto, escutelo y pleuras. Impresiones laterales del metanoto liso-lucientes, cruzadas por una carena en el $^1/_3$ externo; lóbulo mediano del metanoto liso-luciente, impuntuado. Propodeo sin carenas dorsales, con excepción de la del borde posterior y una muy corta que nace en cada ángulo dorso-externo de ésta. Una impresión alargada mediana en la mitad basal atravesada por algunas arrugas transversales débiles, y en cada lado de ésta, una puntuación pilífera mediana que continúa sobre los costados hasta llegar a la carena subespiracular. En cada ángulo póstero-externo del dorso propodeal, una impresión.

FIG. 4. — *Parapechthis bazani*, n. sp. ♀ : *a*, nervulación alar; *b*, segmentos proximales y distales de la antena; *c*, sensorios y cerditas de la superficie ventral del segmento XIX antenal; *e*, uña de las patas intermedias; *f*, cabeza y tórax, aspecto lateral; *g*, ídem del abdomen; *h*, ídem del oviscapto. (*f*, *g* y *h*, dibujados con el mismo aumento).

Abdomen con puntuación fina y densa. Primer tergito con el $^1/_3$ mediano muy elevado y excavado en los $^3/_4$ basales; segundo tergito con una impresión basal fuerte oblicua en cada lado del mediano y otra transversa, poco marcada en el mediano, que atraviesa el segmento en su mitad apical; tergitos III y IV con las bases hundidas y con una impresión débil, pero ancha y transversal, en la ½ distal; tergitos III a VII con micro-reticulaciones poligonales. Vainas con arrugas transversas. Uñas tarsales de todas las patas con diente ancho basal. Nervulación alar indicada en la figura 4.

Medidas relativas

Largo	15.00 mm.
Ala anterior	12.00 × 4.30
Ala posterior	8.60 × 2.36
Antena:	
Escapo	0.55 × 0.35 (0.26)
Pedicelo	0.17 × 0.22 (0.38)
Anillo	0.13
Flagelo:	
Segmento I	0.92 × 0.17
» II	0.68
» III	0.59
» IV	0.59
» XX	0.26 × 0.19
» XXI	0.25
» XXII	0.23
» XXIII	0.22 × 0.17
» XXIV	0.42

	I	II	III	IV	V
Palpos maxilares	0.23;	0.26;	0.39;	0.29;	0.34
Palpos labiales	0.21;	0.15;	0.13;	0.19	

Patas:	I	II	III
Fémur	1.80	2.15	2.70
Tibia	1.50	2.36	3.35
» Espolón		0.47	0.60 y 0.51
Tarso I	0.92	1.03	1.63
» II	0.43	0.43	0.77
» III	0.25	0.25	0.47
» IV	0.17	0.21	0.30
» V	0.50	0.60	0.68
Taladro	5.10		
Vaina	3.00		
Cercas	0.28		

Macho: Parecido a la hembra, pero con los dibujos negros menos intensos.

Habitat: Parásito endófago de la crisálida de *Alabama argillacea*, Hbn., hallado en Salta por el naturalista Ramón Bazán (IV, 1936).

Observaciones: Dedico esta linda especie gustosamente a mi inteligente colaborador, Sr. Ramón Bazán. La biología de este parásito ha sido estudiada por el entomólogo M. J. Viana y sus observaciones serán publicadas en otra oportunidad.

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Por C. C. D.

Fascículos editados por Hermann & Cía., de la colección « Actualités Scientifiques et Industrielles »; $16\frac{1}{2} \times 25\frac{1}{2}$. Número de páginas y precios variables. París.

Nº 281. — Bedeau (F.), *Théorie du Diffuseur* (Haut-Parleur sans pavillon). 68 páginas con figuras en el texto. Precio: 15 francos. 1935.

Fascículo VI de la serie « Théories Mécaniques (Hydrodynamique-Acoustique)» dirigida por Y. Rocard.

En una Introducción, se hace observar, que se fabrican actualmente excelentes altoparlantes sin pabellón; de éstos únicamente se ocupa el presente folleto. La técnica de su fabricación, y su puesta al punto industrial, han realizado, desde una décida atrás, considerables progresos. Al igual que el teléfono, el altoparlante comporta una parte vibrante o diafragma, y un motor que acciona dicho diafragma. Desde mucho tiempo atrás se han esforzado los inventores de realizar un diafragma vibrante constituído al igual que un pistón por una sola pieza; existen numerosos métodos para realizarlo, pero la teoría es siempre la misma o sea la que desarrolla el autor después de describir el altoparlante Rice & Kellogg.

El tema está desarrollado en cinco capítulos seguidos de un *Resumen.*

Nº 287. — Maurain (Ch)., *Magnetisme Terrestre.* 64 páginas. Precio: 15 francos. 1935.

Es el fascículo 1 del folleto titulado Magnetisme et Electricité Tererstre; el cual constituye, a su vez, parte de la serie « Physique du Globe », dirigida por el mismo autor, decano de la Facultad de Ciencias de París y miembro del Instituto de Francia.

Después de una exposición preliminar sobre el conocimiento general del campo magnético terrestre, trata las variaciones seculares, periódicas y accidentales: agitación magnética; perturbaciones y tempestades; intervalo entre los fenómenos solares y los magnéticos terrestres. Sigue tratando, después, las auroras boreales, corriente telúricas, teorías relativas a las perturbaciones magnéticas y a las auroras polares. Finalmente se expone una investigación sobre el origen del campo magnético terrestre.

Nº 308. — WATANABE (PATOSI), *Le Deuxième théorème de la Thermodynamique et la Mécanique Ondulatoire.* 04 páginas. Precio: 20 francos. 1935.

Fascículo XVI de la serie « Exposés de Physique Théorique », dirigida por Luis de Broglie.

El autor, doctor en ciencias, se propone, aquí, encontrar nuevamente la demostración del segundo teorema de la Termodinámica, colocándose sistemáticamente en el punto de vista de la Mecánica ondulatoria. Se trata, dice L. de Broglie, de un hermoso trabajo que podrá ser consultado con el mayor provecho por quinquiera se interese en las teorías físicas modernas. La idea fundamental del autor, sabio japonés, ha sido eliminar en sus raciocinios toda noción distinta de las propias a la Mecánica ondulatoria. Consigue definir la entropía de un sistema, con solo la enumeración de las funciones propias que corresponden a un estado macroscópico dado, es decir, por el número de dimensiones de la multiplicidad correspondiente en el espacio Hilbertiano de las funciones de onda. En definitiva vuelve a encontrar todos los resultados esenciales de la Termodinámica estadística.

Después de este trabajo del profesor Watanabe parecería ser necesario abandonar ciertas esperanzas. Así, al igual que la Dinámica de Newton, la Mecánica ondulatoria no parece poder suministrar una termodinámica estadística sin introducir un postulado suplementario de naturaleza sspecíficamente estadística.

Nº 310. QUINTIN (M.), *Activité et Interaction Ionique.* Segunda Parte. 92 páginas, con figuras en el texto. Precio: 18 francos. 1936.

Fascículo III de la serie « Exposés d'Electrochimie Théorique » dirigida por René Audubert.

Al ocuparnos de la primera parte de este trabajo del profesor Quintin, hemos indicado cuál es su objeto. Esta segunda parte trae un estudio experimental de la actividad de las sales de los metales pesados (Cap. I) y los resultados experimentales (Cap. II).

Después de indicar el objeto del trabajo, expone el autor el método, los aparatos, la purificación de los productos y preparación de los electrodos, los coeficientes medios de actividad y los de actividad individual de los iones; estudio de la hidrólisis, datos termodinámicos, conclusiones y bibliografía.

Nº 315, 316, 317. — MATHIEN (MARUL), *Reactivos Topochimiques.* Tres folletos de 58, 66 y 75 jáginas, respectivamente, con figuras en el texto. Precios: 12 francos cada uno. 1936.

Constituyen los fascículos XI, XII y XIII de la serie « Théories Chimiques » dirigida por G. Urbain.

El primer folleto trata las generalidades; el segundo la Nitración de la celulosa y el último la Gelatinización de las nitrocelulosas.

El autor es doctor en ciencias. En una Introducción expone su plan; dice que los compuestos constituídos por la polimerización de grupos moleculares simples, se presentan con caracteres que, a menudo, ha sido muy difícil hacer entrar en los marcos habituales de la química o de la físicoquímica. En su trabajo ha hecho una recordación de los rasgos esenciales, describiendo, particularmente, los modos de reacción de los cuerpos fuertemente polimerizados, llegando así a la definición de una reacción « topoquímica ».

La parte principal trae un estudio, el más detallado, de las reacciones topoquímicas particulares. El autor ha tenido la suerte de poder precisar el carácter « topoquímico » de una reacción mediante los dos ejemplos de la nitración de la celulosa y de la acción de la acetona sobre la nitrocelulosa.

El estudio particular de una reacción de la celulosa ha conducido al autor a proponer una estructura aproximada de las nitrocelulosas; a definir un fenómeno de gelatinización, así como también lo que puede llamarse dispersión de las moléculas en solución. Así ha podido precisar el significado que pueden tener las medidas físicas de peso molecular sobre derivados celulósicos.

Observa, finalmente, que su trabajo puede poner a la vista el interés que existe en seguir sistemáticamente la marcha de reacciones químicas y de modiifcaciones de estado físico, mediante exámenes de estructura por medio de los rayos X, intereses muy grande cuando las reacciones tienen lugar — como sucede en los casos que ha tratado — enteramente en el estado sólido.

Nº 321-322. — Musceleanu (Chr.), *Chaleur Specifique et Théorie des Quanta.* Dos folletos de 50 y 35 páginas respectivamente. Precio: 15 y 12 francos. 1936.

Fascículo I y II de la serie « Exposés de Physique Générale et Quanta » dirigida por el autor, profesor en la Facultad de Ciencias de Bucarest.

Después de una Introducción, se considera el calor específico desde el punto de vista termodinámico; el caso de los cristales sólidos; el calor específico y la teoría cinética, y la de los *quanta;* la teoría de Einstein; determinación de la frecuencia atómica en los sólidos; trabajos de Nernst y Lindermann; los calores específicos según la teoría de Debye; determinación de la frecuencia; teoría de Born y Karman. Determinaciones experimentales. Al final de cada folleto, acompaña una bibliografía.

En lo relativo a determinaciones experimentales, el autor manifiesta que la teoría de Born y Karmán ofrece cierto interés para la determinación de constantes elásticas; ella ha abierto una nueva vía que permite vincular las constante físicas de los cuerpos y su propia estructura intrínseca.

Nº 324. — Rainé (P.), *Biréfringence Magnétique de l'Oxigène liquide, de l'Azote liquide et de leurs Mélanges.* 56 páginas con figuras en el texto y dos láminas fuera de él. Precio: 15 francos. 1936.

Fascículo II de la serie « Exposés de Magneto Optique » dirigida por A. Cotton.

El autor es encargado de Investigaciones en el Laboratorio del « Grand Electro-Aimant de Belbone » y expone en este folleto el resultado de trabajos experimentales propios, con instrumental también original.

El prefacio ha sido escrito por A. Cotton, miembro del Instituto de Francia y profesor en la Sorbona. Después de una Introducción, de un histórico y de generalidades sobre la birefringencia magnética, se exponen los aparatos y disposiciones empleadas para la investigación. Vienen después los resultados y las comparaciones.

Li birefringencia magnética pone en evidencia que el oxígeno es más complicado que lo que pudo pensarse en un principio.

Al final, se esboza un programa de investigaciones complementarias relativas al oxígeno líquido.

Nº 325, 326, 327. — Platrier (Ch.), *Exposés de Géométrie Cinématique.* 3 fascículos de, respectivamente, 56, 86, 36 páginas. Precios: 12, 18 y 8 francos. 1936.

El profesor Platrier de la Escuela Politécnica y de la Escuela Nacional de Puentes y Calzadas de París, ha escrito, en estos folletos, el curso que dicta en aquellas Escuelas.

El primer fascículo trata la Cinemática del sólido y la teoría de los vectores. El segundo, la Masa en cinemática y la teoría de los tensores de segundo grado; el tercero, la Cinemática de los medios continuos.

El realidad se trata de las notas entregadas por el profesor Platrier a sus alumnos, como resumen del curso de mecánica que dicta en los establecimientos de enseñanza referidos.

Estos tres primeros fascículos, se refieren a la Mecánica neutoniana. Constituyen la Geometría preparatoria al Estudio de dicha Mecánica; los elementos que traen permitirán a los lectores abordar sin mayores preocupaciones, el estudio del capítulo fundamental de la física teórica y experimental que se designa con el nombre de *Mecánica clásica* o neutoniana.

El autor cree que, a pesar de haber únicamente utilizado un bagaje muy sencillo de cálculo vectorial y tensorial, la geometría preparatoria que expone puede ser útilmente aprovechada por aquellos que deseen estudiar las teorías físicas modernas para iniciarse en el cálculo absoluto.

El tercer fascículo que trata de la cinemática de los medios continuos, estudia las transformaciones continuas en un medio continuo deformable; la transformación infinitesimal continua en ese mismo medio; y el movimiento continuo de un medio deformable; la ecuación de continuidad y las variables de Lagrange y de Euler.

Nº 329. — Menchoff (D.), *Les Conditions de Monogénéité.* 54 páginas. Precio: 15 francos. 1936.

Fascículo III de la serie « Théorie des Fonctions » dirigida por Paul Montel. El autor es profesor de la Universidad de Moscú.

Está, este folleto, consagrado al estudio de las condiciones suficientes para que una función de una variable compleja sea holomorfa en el interior de un dominio abierto. Se considera una propiedad local de la función en un punto, es decir, que solo dependa de sus valores inmediatos a ese punto; y se trata de establecer cuál debe ser la propiedad en cuestión para que la función sea holomorfa en el interior de un dominio, si la propiedad referida se verifica para todos los puntos de dicho dominio (salvo tal vez en los puntos de un conjunto finito o enumerable). Las propiedades a que nos referimos deben ser las menos restrictivas posibles. Esto es lo que explica el autor en el Prefacio, previniendo que la cuestión no está aun resuelta en toda su generalidad.

Una bibliografía termina el trabajo.

Nº 330. — Arditti (René), *Les Théories quantiques.* 34 páginas. Precio: 8 francos. 1936.

Fascículo XIV de la serie « Théories Chimiques » dirigida por G. Urbain.

El autor es profesor de la Escuela Nacional francesa de Puentes y Calzadas y el presente folleto tiene una conferencia dada por él, el 14 de marzo 1935, en el Conservatorio francés de Artes y Oficios, con el propósito

de poner de manifiesto en qué medida las ideas físicas modernas han consegundo interpretar el fenómeno químico de la vinculación de dos átomos. La exposición comporta cinco capítulos que tratan respectivamente de: El Nacimiento y desarrollo de los *quanta*, La Molécula de Hidrógeno. Primera extensión: valencia de *Spin;* la activación. Segunda extensión: valencia orbital. Teoría de las valencias dirigidas.

Después de esbozar, así, algunos conceptos nuevos, (es decir, no incluídos en las teorías clásicas), introducidas en la ciencia por las teorías quánticas, dice el autor que ella — y sobre todo en la forma que revisten en la Mecánica de Broglie y de Schrödinger, — han permitido la interpretación, *sin hipótesis* particular, de un hecho químico fundamental: el de la vinculación homeopolar entre dos átomos idénticos.

Nº 333. — Goursat (Edouard), *Leçons sur les Séries Hypergéométriques et sur quelques fonctions que s'y rattachent.* Fascículo I: *Propriétés générales de l'Équation d'Euler et de Gauss.* 96 páginas. Precio: 20 francos. 1936.

El conocido miembro del Instituto de Francia y profesor honorario de la Facultad de Ciencias de París, expone sucesivamente, en este libro, los siguientes puntos: Las 24 series de Kummer. Definición de Riemann. Integracción por cuadraturas parciales. Integrales definidas de Euler y de Jacobí.

Puntos singulares logarítmicos; caso de reductibilidad. Grupo de la ecuación E (α, β, γ). Ecuaciones de la misma familia. Relaciones lineales entre las integrales.

Con el nombre de series hipergeométricas se entienden, aquí, series enteras de una variable ($a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$) en las que la relación $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ iguala al cociente de dos polinomios de mismo grado en n; relación que tiene un límite finito y distinto de cero cuando n aumenta indefinidamente.

Nº 335. — Deflandre (Georges), *Les Flagellés Fossiles.* 100 páginas con figuras. Precio: 20 francos. 1936.

Fascículo III de la serie « Exposés de Géologie » dirigida por L. Cayeux, del Instituto y del Colegio de Francia.

El autor, en un prefacio, explica porqué no se encuentra mención de la existencia de flagelados fósiles en la mayoría de las obras generales de Paleontología y eso a pesar de que es conocida la existencia de ciertos representantes de aquéllos desde el Cambriano hasta el presente; y de la participación, a veces muy grande, que varias familias pueden reinvidicar en la génesis de rocas sedimentarias calcáreas o silíceas. Agrega que es precisamente para remediar a dicho estado de cosas que ha escrito este opúsculo, en el que están representadas las más recientes adquisiciones relativas a los Flagelados en el dominio paleontológico.

Viene luego una Introducción, en la que se da un histórico del tema y otras informaciones.

El trabajo comprende, desde luego, unas generalidades sobre los Flagelados. Clasificación. Fosilización. Cuadro de los Flagelados fósiles. Luego trae un estudio particular de los diversos grupos de Flagelados fósiles. Organización. Biología, Sistemática, Yacimientos. Un tercer capítulo habla de la Repartición geológica y de la importancia relativa de los grupos en las formaciones sedimentarias. Por último, el Estado general de nuestros cono-

cimientos respecto de la evolución comparada de los principales grupos y un Indice alfabético precedido de una Bibliografía.

Nº 341. — Brajnikov (B.), *Pétrographie et Rayons X.* 40 páginas. Precio: 12 francos. 1936.

Fascículo II de la serie « Exposés de Géochimie » dirigida por Pedro Urbain.

Se trata de un ensayo de bibliografía crítica. Para el estudio de los cuerpos cristalizados homogéneos y de las mezcias amorfas y líquidas, se han utilizado diagramas de difracción de los rayos X. Era lógico, entonces, preveer el uso de un mismo método de trabajo aplicado a la investigación de cuerpos heterogéneos como las rocas. El autor expone, en este folleto, muy sucintamente, los dominios de aplicación de los métodos actualmente practicados por los petrógrafos. Define, primero, los principales grupos de rocas y los métodos de estudios en petrografía. Luego los principios y la técnica del método de difracción de los rayos X. Vienen luego las aplicaciones y las conclusiones, con una bibliografía sumaria.

Resulta que los rayos X tienen sus defectos y sus cualidades. Juiciosamente aplicados por un experimentador experto, constituyen un instrumento de gran poder; y es casi seguro que les espera un brillante porvenir en la ciencia de las rocas.

Nº 344. — Darmois (E.), *Un nouveau corps simple, le Deutérium ou Hydrogène Lour* (Segunda parte). 42 páginas. Precio: 10 francos. 1936.

Fascículo III de la serie « Exposés de Chimie-Physique » dirigida por el autor.

Nos hemos referido, antes, a la primera parte de esta exposición del profesor E. Darmois, de la Sorbona, en donde se daba una idea de conjunto de este nuevo isótropo de hidrógeno. En este folleto se complementa lo anteriormente expuesto; y, al leerlo, llama poderosamnt la atención la bibliografía acompañada, o sea, el interés que el citado Deuterium (nombre propuesto por Urey y simbolizado por D), ha despertado en los físicos y químicos. Estos tienen, en el nuevo cuerpo, un isótropo cuya masa es doble de la de su homólogo liviano. El autor expone en diversos capítulos, cómo se produce la separación electrolítica de los dos isótropos; las propiedades físicas del agua pesada, del deuterium y sus compuestos, las experiencias que utilizan el núcleo del denterium, y la desintegración.

Precede una Introducción y termina una conclusión y, como dijimos, una copiosa bibliografía.

* * *

Levi-Civita (Tullio), *Le problème des deux corps en Relativité générale.* 28 páginas. 16,5 × 25 cm. (L'Enseignement Mathématique, nº 3-4. 1935).

Sulla Nozione di intervallo fra due avvenimenti; primo approccio alla teoria della relatività. 25 págs. 17 × 24 cm. (Nuovo Cimento, Anno XIII, Nº 2. Febbraio 1936).

The Secular effect of tides on the motion of planetary Systems. 18 págs. 18 × 25 cm. (American Mathematical Monthly, Vol. XLI, Nº 5, May 1934).

Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro (Act. P. Acad. Sc. Nov. Lync. Anno LXXXVIII-III Sess.). 8 págs. 21,50 × 30 cm. 1935.

Se trata de tiradas aparte de otros tantos trabajos del ilustre profesor de la Universidad de Roma.

En el primero, se precisan las circunstancias bajo las cuales, admitiendo el principio de la Relatividad general, es posible, como en la Mecánica común, reducir el problema del movimiento de dos cuerpos celestes al de dos puntos ficticios que los representen.

En el segundo se establece primero un análisis sumario de los criterios que admiten fijar una variable única apropiada a la representación del tiempo para un número cualquiera de observadores en reposo los unos respecto de los otros. Se contempla, después, el caso de un observador móvil, y se localiza la diferencia entre el registro (de la física clásica), que asume un mismo comportamiento del tiempo también para el observador móvil, postulando así un tiempo absoluto y otros registros *a priori* posibles.

En el tercero, después de unas observaciones previas respecto de los sistemas canónicos, trata las soluciones relativamente estacionarias en casos particulares; cambio de variables; forma invariante para que una solución sea estacionaria. Luego se abordan los sistemas canónicos con integrales conocidas de cualquier forma; el problema de los dos cuerpos, y el de tres, más cuerpos, etc.

En el último toma en consideración cuerpos cuyos centros de gravedad coinciden durante el movimiento, con un elemento material del cuerpo.

Enriques (Federico), *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna.* Tercer y último volumen; 350 páginas (14 × 26,5), con numerosas figuras. Bologna, 1936. Nicola Zanichelli. Precio: 30 liras.

Este libro constituye el n° 11 de la serie « Per la Storia e la Filosofia delle matematiche » dirigida por el profesor Enriques. Abarca los libros XI-XIII de Euclides. Han prestado su concurso — como para los tres precedentes tomos — diversos colaboradores; y han contribuído financieramente para ayudar al *Instituto Nazionale per la Storia delle Sienze,* promotora de este trabajo, los siguientes centros: *Istituto Nazionale delle Assicurazioni, Banco Commerciale Italiano, Banco Nazionale di Credito* y la casa editora Nicola Zanichelli.

En una Introducción, el Dr. Enriques, conjuntamente con el anuncio de la terminación de la obra, da cuenta de las dificultades que ella ha ofrecido, y expresa su esperanza de que, a pesar de algunos defectos y deficiencias de que adolecerá, podrá alcanzar su objeto, o sea, ofrecer a los estudiosos, y particularmente a los profesores secundarios una vista histórica del desarrollo de la geometría elemental al través de los siglos; así como también un instrumento seguro para educarlos en la comprensión y crítica de los textos.

Entre los colaboradores más importantes figura la doctora María Teresa Zapelloni de Maspero, que ha revisado la traducción del texto griego; el ingeniero Atilio Frajese que, habiendo profundizado el estudio de la teoría de la igualdad de los triedros y la doctrina de Arquímedes sobre la medida del círculo y de los cuerpos redondos, ha prestado su muy precioso concurso en la interpretación de los libros XI y XII.

Después de este prefacio, viene una Introducción relativa al histórico, a la interpretación de los términos y de las proposiciones (libro XI); los libros XII y XIII tratan las proposiciones. Viene luego un apéndice relativo a los libros XIV y XV. Por último un índice muy completo y prolijo de autores y comentadores que abarca los cuatro volúmenes.

De los tres tomos anteriores nos hemos ocupado en su oportunidad en estos mismos *Anales.*

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO SEGUNDO

Pág.

J. C. Vignaux. — Sobre las series convergentes simples y múltiples de funciones de variable compleja dual 3

José Torres Revello. — La expedición de don Pedro de Mendoza, y la fundación de Buenos Aires 46

P. Magne de la Croix. — Tratamiento de la tuberculosis pulmonar por la sobrealimentación 60

P. Magne de la Croix. — Sobre la ninfosis 65

Francisco La Menza. — Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos (Continuación). 86, 297 y 381

Enrique V. Zappi. — Los problemas del hemo y de la clorófila 126

Eduardo Krapf. — Tratamiento racional de los epilépticos 166

J. C. Vignaux. — Extensión del método de sumación de M. Borel a las series de funciones de variable compleja dual e hiperbólica 193

José Babini. — Matemáiica y poesía 232

Emilio L. Díaz. — La radiación del viento en « Cristo Redentor » y la radiación solar 248

H. R. Ratto. — La náutica y el pilotaje durante el siglo XVI. Conferencia leída en la Sociedad Científica Argentina el día 10 de julio de 1936 257

Enrique V. Zappi y Juan F. Salellas. — Contribution a la connaissance de nouveaux dérivées arseniés aromatiques 281

Carlos Rusconi. — Anomalías en las cornamentas del Huemul 288

SESION SANTA FE de la Sociedad Científica Argentina:

Conmemoración del centenario de Ampère. 321

Ciclo de conferencias. — Herencia Mendeliana 321

Conferencia del Rv. P. José A. Laburu 323

Sesión de comunicaciones científicas en homenaje a Ameghino 324

A. Larguía de Crouzielles. — Datos arqueológicos sobre paraderos indígenas de Santa Fé (Isla del Periquillo, Helvecia y Sauce Viejo) 326

J. Frenguelli. — Apuntes estratigráficos acerca del yacimiento del « Glossotherium » de la laguna Guadalupe 335

G. A. Fester, F. A. Bertuzzi y D. Pucci. — La identidad del yacarol con el d-citronelol 339

H. Damianovich. — La Química del Helio y la transmutación de los de los elementos 339

Excursión a las barrancas de Paraná 349

Carlos Biggeri. — Singularidades de las funciones analíticas de una y de varias complejas independientes 350

Pág.

EMILIO L. DÍAZ. — Sobre la correlación entre la radiación solar y la presión en Valdivia 395

EVERARD E. BLANCHARD. — Descripción de icneumonoideos argentinos . . 398

NOTICIARIO

E. R. — Noticiario . . . . . 188 y 256

BIBLIOGRAFÍA

C. C. D. . . . . 64, 123, 311 y 408

E. R. . . . . 188 y 251